
3433 07598929 7







HANDLEIDING

VOOR

ONDERWIJZERS,

OM

VOLGENS EENEN GEREGELDEN GANG, KINDEREN TE LEEREN OPMERKEN, DENKEN EN SPREKEN;

TOEGEPAST OP DE

ZAMENSTELLING DER EENVOUDIGSTE VOORWERPEN UIT DE MEETKUNDE;

BEKEND ONDER DEN NAAM VAN

VORMLEER;

DOOR

P. J. PRINSEN,

Directeur en Onderwijzer van 's Rijks Kweek-school voor Schoolonderwijzers, te Haarlem.

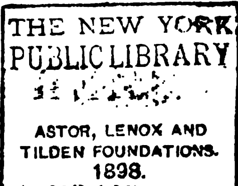
TWEEDE STUKJE.

TE AMSTERDAM, BIJ

JOHANNES VAN DER HEY EN ZOON.

1824.

6



VOORBERIGT.

De betrekking, waarin ik tot den, helaas! te vroeg overledenen VAN DAPPEREN *gestaan heb, blijkens het Voorberigt van het eerste Stuk, maakte het mij eensdeels tot pligt, dit zijn begonnen werk, ware het mogelijk, te voltooijen, terwijl mijne betrekking tot het onderwijs, aan de andere zijde, dit van mij vorderde.*

Ik heb getracht mijnen voorganger op den voet te volgen, maar ben zeker dikwijls, tegen mijnen zin, afgeweken; zoo, doordien meerder inzien mij niet te beurt was gevallen, als ook omdat VAN DAPPEREN *zijnen geheel eigenen gang had, die*

 voor

voor mij moeijelijk op het volgende was toe te passen. Evenwel heb ik gedaan, wat ik konde doen, en laat gaarne de verdere volmaking aan eenen anderen over; terwijl het mij intusschen altijd aangenaam zal zijn, gepaste teregtwijzingen van mijne Medeonderwijzers te ontvangen.

P. J. PRINSEN.

Haarlem,
December 1824.

IN-

INHOUD.

§. 11.

VIER-

HANDLEIDING

VOOR

ONDERWIJZERS,

OM

VOLGENS EENEN GEREGELDEN GANG, KINDEREN TE LEEREN OPMERKEN, DENKEN EN SPREKEN;

TOEGEPAST OP DE

ZAMENSTELLING DER EENVOUDIGSTE VOORWERPEN UIT DE MEETKUNDE;

BEKEND ONDER DEN NAAM VAN

VORMLEER;

DOOR

P. J. PRINSEN,

Directeur en Onderwijzer van 's Rijks Kweekschool voor Schoolonderwijzers, te Haarlem.

TWEEDE STUKJE.

TE AMSTERDAM, BIJ

JOHANNES VAN DER HEY EN ZOON.

1824.

voor mij moeijelijk op het volgende was toe te passen. Evenwel heb ik gedaan, wat ik konde doen, en laat gaarne de verdere volmaking aan eenen anderen over; terwijl het mij intusschen altijd aangenaam zal zijn, gepaste teregtwijzingen van mijne Medeonderwijzers te ontvangen.

P. J. PRINSEN.

Haarlem,
December 1824.

INHOUD.

§. 11.

Bladz.

VIER-

VIERDE AFDEELING. Bladz.

VIJFDE AFDEELING.



HAND-

HANDLEIDING

VOOR HET

ONDERWIJS

IN DE

VORMLEER.

Het is geenszins het oogmerk, de, in het eerste Stukje voorgedragene, vormleer te verheffen of voort te zetten tot de zuivere meetkunde, maar om aan te toonen, hoe dit onder behoorlijke leiding zou kunnen geschieden. Vandaar zal hier geene breedere uitwerking van de onderwerpen plaats hebben, dan in de behandeling der eigenlijke vormleer voorkomt. De bijgevoegde aanmerkingen kunnen als wenken beschouwd worden, die de wijze van onderrigt betreffen.

Het wezenlijke onderscheid in de beschouwing van hetgene gegeven is en hetgene alhier gegeven zal worden, bestaat daarin, dat men in het voorgaande zich meer bepaalde tot datgene, wat den vorm betrof, terwijl men hier ten oogmerk heeft de eigenschappen dier vormen op te delven en te bepalen.

Voor men echter tot het opzoeken der eigenschappen overgaat, zal men eenige bepalingen en algemeene waarheden, als ook het gebruik van sommige verkortings-teekens laten voorafgaan.

A §. 1.

§. 1.

Bepalingen.

1. De *kromme lijnen* worden onderscheiden in regelmatige en onregelmatige.

2. Eene *regelmatige kromme lijn* is (in dit werkje) die, welke verlengd zijnde, eenen cirkel maakt.

3. Eene *onregelmatige kromme lijn* is die, welke, verlengd zijnde, geenen cirkel maakt. Fig. 1.

4. Een *cirkel* is een plat vlak, besloten binnen eene kromme lijn, die in zich zelve wederkeert, en die men den omtrek noemt, en welks punten allen even verre afstaan van een punt in den cirkel, het middelpunt genaamd. Fig. 2.

Aanmerking. De onderwijzer schrijft zijne leerlingen de bovenstaande bepalingen niet maar zoodanig voor, maar brengt hen volgens den heuristischen gang tot die gedachten. Hij kan hen daartoe herinneren, hoe te voren de lijnen onderscheiden werden, namelijk in regte en kromme. Vraagt of de regte ook nog kunnen onderscheiden worden? Waarop zeker neen geantwoord wordt. Of het woord krom, dan niet zulk eene ruime beteekenis heeft, dat men die in soorten zou kunnen ver-

verdeelen? Verzoekende hun eene juiste kromme lijn en ook eene andere, die niet zoo juist is, op de lei te trekken. Uit deze verrigting neemt de onderwijzer aanleiding om fig. 1 en 2 voor te ſtellen, en te benoemen. Op gelijke wijze wordt al pratende en werkende de 2e, 3e en 4e bepaling ter kennis van het kind gebragt.

5. Een *radius*, ſtraal, of middelpunts-lijn is iedere regte lijn, die uit het middelpunt tot aan den omtrek getrokken wordt.

Opheldering. Fig. 3. A is het middelpunt en AC, AB, AD en AI zijn radien.

Uit hetgene tot hiertoe gezegd is volgt:
Alle radien van denzelfden cirkel zijn even lang.
Een radius kan geen cirkel deelen.

6. Eene *middellijn* is eene regte lijn, die door het middelpunt eens cirkels gaat, en ter wederzijde in den omtrek eindigt. Fig. 3, CD.

Hieruit volgt, dat iedere middellijn den cirkel in twee gelijke deelen deelt; dat alle middellijnen van denzelfden cirkel even lang zijn.

7. *Chorden* zijn regte lijnen in den cirkel, die ter wederzijden in den omtrek eindigen, maar niet door het middelpunt des cirkels gaan. Fig. 3. EF.

Hieruit volgt, 1. dat alle chorden niet even lang zijn; 2. dat eene chorde korter is dan eene middellijn; 3. dat die de grootste is, welke het digst bij het middelpunt staat; en 4. dat eene chorde den cirkel in twee ongelijke deelen deelt.

8. Een *segment* is dat gedeelte van eenen cirkel, hetwelk tusschen eene chorde en een boog begrepen is. Fig. 3. EGF.

Hieruit blijkt, dat alle segmenten niet even groot zijn.

9. Een *sector* is een gedeelte van den cirkel, begrepen tusschen twee radien en een boog. Fig. 3. CAB, BAI en IAD.

Aanmerking. Om de kinderen al werkende op deze bepalingen te brengen, kan de onderwijzer hen verzoeken eene lijn in den cirkel te trekken, doch zoodanig, dat de uiteinden iets van den cirkel raken. Het kind trekt daarop eene chorde; waarna de onderwijzer eene bepaling vraagt ten opzigte van de ligging dier lijn, en het kind zegt: eene regte lijn, wier uiteinden den omtrek des cirkels raken. Dit vindt de onderwijzer goed, maar hij voegt er bij: eene regte lijn, die niet door het middelpunt des cirkels gaat. Hierna spoort de onderwijzer de kinderen aan, om nog eene regte lijn in den cirkel te trekken, en vraagt eene be-

pa-

paling. Blijkt uit die bepaling, dat de lijn ten opzigte van den cirkel dezelfde is, als de voorgaande, dan wekt hij de kinderen op tot het trekken van eene geheel andere; enz. Wanneer de 5de, 6de en 7de bepaling aldus duidelijk voor het kind geworden is, dan neemt de onderwijzer aanleiding, uit de wijze waarop de middellijn den cirkel deelt, te bepalen hoe dit door de chorde wordt gedaan. Ook vraagt hij, of de kinderen den cirkel nog anders door regte lijnen kunnen verdeelen, en komt zoo van zelf op de 8ste en 9de bepaling.

10. De omtrek van eenen cirkel wordt doorgaans verdeeld in 360 gelijke deelen, graden genoemd, iedere graad in 60 minuten en iedere minuut in 60 feconden. Fig. 3. BIDFGEC.

11. Een gedeelte van den omtrek noemt men een boog. Fig. 3. BC, enz.

Aanmerking. Het valt niet moeijelijk het kind te brengen tot den omtrek. Men behoeft flechts te vragen: hebben wij nu alles van den cirkel afgehandeld? En het kind antwoord: van den omtrek is nog niet gefproken. Dit geeft den onderwijzer aanleiding, om het kind door vragen, van trap tot trap te brengen tot de verdeeling van den omtrek, en deszelfs gebruik. De verdeeling ftaat hier boven en het gebruik volgt.

12. De omtrek van eenen cirkel dient om de grootte der hoeken te meten.

Aanmerking. Het is van belang, dat de onderwijzer deze bepaling goed doet uitwerken, en aan het einde dadelijk de hoeken laat meten door eenen transporteur. Hij kan beginnen met het kind te bepalen tot datgene, wat den hoek maakt, en dat de verwijdering van die grenzen de grootte van den hoek is. Dat derhalve die verwijdering moet gemeten worden, en wel door den omtrek van den cirkel. Dat de boog, die tusſchen de beenen van den hoek begrepen is, de grootte van den hoek is, en dat het aantal graden van dien boog gezegd wordt, de graden te zijn, die de hoek groot is. Hieruit komt van zelf voort.

13. Een regte hoek is 90° graden groot. Fig. 3. ∠ BAC.

14. Een ſcherpe hoek is minder, dan 90° groot. Fig. 3. ∠ BAI.

15. Een ſtompe hoek is meerder, dan 90° groot. Fig. 3. ∠ CAI.

16. Eene lijn, die perpendiculair op eene andere regte lijn ſtaat, maakt ter wederzijde regte hoeken. Fig. 3. BA is perp. op CD; want ∠ CAB is regt en ∠ BAD ook.

§. 2.

§. 2.

Beschouwing van sommige waarheden axioma's *genaamd.*

Het meten der lijnen.

De onderwijzer schrijft twee lijnen op het bord en vraagt aan de kinderen hoe die kunnen zijn, in opzigt tot hare grootte, en hij zal daarop zeker ten antwoord bekomen: gelijk en ongelijk. Dit geeft aanleiding tot vragen, hoe men de ongelijkheid, of hetgene de eene grooter dan de andere is, zou kunnen weten? Daardoor brengt de onderwijzer het kind op het meten der lijnen; toont dat de eene lijn door de andere gemeten wordt, en dat men langs dien weg tot de kennis van de ware lengte der lijn geraakt. Daarna gaat hij over tot het beschouwen van

Eene regte lijn.



De onderwijzer zegt: wanneer u deze lijn aldus werd voorgesteld, zoudt gij dan wel wat van dezelve kunnen zeggen, dat waarheid is? Denk aan ge-

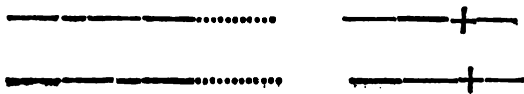
gelijk en ongelijk, aan deel en geheel. Dat eene lijn verlengd, verkort en gedeeld kan worden is reeds te voren behandeld.

Het kind antwoordt mogelijk hierop: (*a*) het geheel is gelijk aan al de deelen te zamen.

Zulk antwoord neemt de onderwijzer terſtond als uitmuntend aan!, en tracht ook te bekomen: (*b*) het geheel is grooter, dan ieder deel op zich zelf.

Verder ſpoort hij de kinderen aan, nog meer waarheden in de lijn of derzelver deelen te vinden.

Twee regte lijnen.



O. Wanneer u aldus twee gelijke lijnen worden voorgeſteld, welke waarheden kunt gij dan van die lijnen opgeven? (Indien de kinderen niet antwoorden, dan zegt de onderwijzer: nu, ik zal beginnen, en gij zult het ſlot zeggen).

O. (*c*) Wanneer bij twee gelijke lijnen twee gelijke ſtukken gevoegd worden......

K. Dan blijven de lijnen gelijk:

O. (*d*) Wanneer van twee gelijke lijnen gelijke ſtukken worden afgenomen......

K. Dan zijn de overblijvende ſtukken gelijk.

O. De ſom van twee gelijke lijnen is, in opzigt tot eene lijn, gelijk aan......

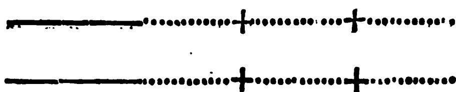
K. Gelijk aan het dubbeld van eene lijn.

O.

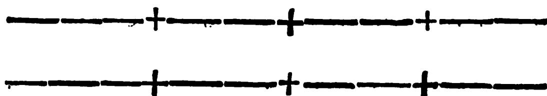
O. Wat is dus eene lijn in opzigt tot de fom van twee gelijke?

K. Eene lijn is de helft van de fom van twee gelijke.

Heeft de onderwijzer de kinderen op deze of dergelijke wijze op den weg gebragt, dan fpoort hij hen aan om verder zelf nog eenige waarheden op te zoeken. Vooral vraagt hij hen ook, hoe zij zich van de gelijkheid van twee lijnen zouden overtuigen, ten einde op hun antwoord de grondftelling te kunnen bouwen: (*e*) van twee gelijke lijnen pasfen de uiteinden op elkander; en omgekeerd, (*f*) pasfen de uiteinden op elkander, dan zijn de lijnen aan elkander gelijk.



Vervolgens ftelt men aan het kind de gelijke lijnen als hier boven voor, en fpoort het aan, daarvan eenige waarheden op te geven; bijzonder zorgt de onderwijzer, dat het kind op deze axioma komt: (*g*) gelijke dingen gelijkelijk vermenigvuldigd geven gelijke uitkomften.



Bij de behandeling van deze voorftelling moet

 voor-

vooral de waarheid uitkomen, dat (*h*). gelijke dingen, gelijkelijk gedeeld, gelijke quotienten geven.

De onderwijzer gaat bij deze twee ongelijke lijnen weder op denzelfden voet voort, en tracht door vragen en zeggen het kind daarheen te brengen, dat het zelf alle waarheden ontdekt en benoemt, die van twee ongelijke lijnen te ontdekken en te benoemen zijn; b. v.

Van ongelijke lijnen is de eene grooter, dan de andere.

Hetgene de eene lijn grooter is, dan de andere wordt verſchil genoemd.

Van de grootſte het verſchil afgetrokken, worden de lijnen gelijk.

Wanneer men (*i*) bij ongelijke lijnen gelijke ſtukken voegt, dan blijven zij ongelijk.

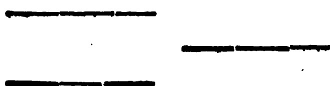
Wanneer men bij ongelijke regte lijnen ongelijke ſtukken voegt, dan kunnen zij gelijk worden.

Wanneer men van (*j*) ongelijke regte lijnen gelijke ſtukken afneemt, dan blijven de resten ongelijk.

Enz. enz.

Drie

Drie regte lijnen.



O. Indien men u, kinderen! aldus drie lijnen als gelijk voorstelde, zoudt gij dan wel iets van dezelve kunnen zeggen?

K. De drie lijnen zijn aan elkander gelijk; de drie zijn te zamen driemaal zoo groot als een; een is een derde van de drie en de helft van de helft van de twee; de twee ter linkerhand zijn te zamen het dubbeld van de andere; enz.

O. Zeer goed; maar als ik u zeide, dat de twee lijnen ter linkerzijde aan elkander gelijk zijn, en een van die ook gelijk aan de derde is, wat zoudt gij dan wel besluiten ten aanzien van de tweede en derde?

K. Dat zij ook gelijk zijn.

O. Spreek nu de waarheid eens geheel uit.

K. (*k*) Wanneer twee lijnen even groot zijn, en een van beide gelijk aan een derde is, dan zal de andere ook gelijk aan de derde zijn.

Aanmerking. Wij dragen hier de zaak op verschillende wijze voor, ten einde te toonen, dat men bij de ontwikkeling dezer waarheden aan niets gebonden is, alleen het zelfzoekende bij de kinderen in het oog houdende.

Ver-

Vervolgens ſtelt men de lijnen aldus voor, en de onderwijzer doet de volgende waarheid door het kind ontdekken, namelijk: (*l*) als twee dingen even groot zijn en een van beiden kleiner dan eene derde, dan zal de andere ook kleiner dan de derde zijn.

Hierop volgt de voorſtelling der lijnen aldus, en het kind ontdekt de waarheid, dat (*m*) als twee dingen even groot zijn en een van beide grooter dan eene derde is, de andere ook grooter dan de derde zal zijn.

Meerdere lijnen.

Onder vele andere waarheden doet de onderwijzer het kind ook dat ontdekken: wanneer eenige dingen aan elkander gelijk zijn, en een derzelve ge-

gelijk aan een ander buiten die is, dan zijn zij ieder aan dat gelijk en omgekeerd: (n) alle dingen, die ieder aan dezelfde grootheid gelijk zijn, zijn allen aan elkander gelijk.

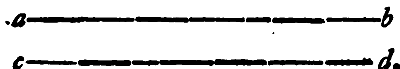
---

§. 3.

Het gebruik der teekens.

O. Kinderen! wanneer men in de vormleer verder alles met woorden wilde uitdrukken, dan zou men in de behandeling zeer omslagtig worden en veel tijd besteden, die nuttiger kon doorgebragt worden. Daarom moet men hier leeren zich zoo beknopt uit te drukken, als mogelijk is, waartoe het gebruik van teekens bijzonder veel helpt. Eenige van deze teekens willen wij u hier voordragen, terwijl wij de andere, onder de behandeling der verdere zaken, zullen doen voorkomen.

Zie hier nu deze twee gelijke regte lijnen



Hoe zoudt gij de bovenste noemen in onderscheiding van de onderste?

K.

K. De lijn met de letters *a* en *b*.

O. Men zegt maar de lijn *ab*. En hoe de onderste?

K. De lijn *cd*.

O. Maar wanneer ik nu verder wil gaan en u aantoonen dat de lijn *ab* gelijk aan de lijn *cd* is, zonder het woord *gelijk* te noemen?

K. Dan moet men daarvoor een teeken hebben.

O. En welk teeken denkt gij? weet gij eenvoudiger en mooijer teeken, dan twee gelijke kleine lijntjes, aldus =?

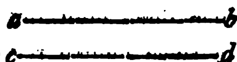
K. Neen, dat is wel zeer mooi bedacht.

O. Toon nu aan dat de lijn *ab* gelijk *cd* is.

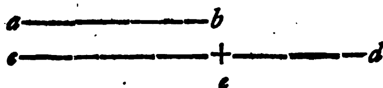
K. Ab = cd.

Op deze en dergelijke wijze brengt de onderwijzer den kinderen het gebruik van het grooter- en kleiner-teeken (<) aan, alsmede dat van optellen (+), aftrekken (—), vermenigvuldigen (×), en deelen ($\frac{2}{3}$ of :).

Hierna zegt men tot de kinderen: toont nu eens uwe vaardigheid in het gebruik der bovenste teekens.



Wijst mij door letters en teekens aan, dat van twee gelijke regte lijnen de eene gelijk is aan de helft van de som van beide.



Dat

Dat van twee ongelijke lijnen de eene gelijk is aan de andere plus of min het verschil.

Van twee grootheden *a* en *b* is driemaal de eerste gelijk aan de helft van vijfmaal de tweede, enz.

Tot oefening.

Wijs, door getallen of grootheden en het gebruik van teekens, de volgende waarheden aan:

1. De dingen die aan dezelfde grootheid gelijk zijn, zijn ook aan elkander gelijk.

Aanmerking. De onderwijzer leidt het kind tot dusdanige bewerking:

$$10 + 10 = 20$$
$$8 + 12 = 20$$
$$4 + 16 = 20$$

derhalve $10 + 10 = 8 + 12 = 4 + 16$

of

$$ab = cd$$
$$ef = cd$$
$$gh = cd$$

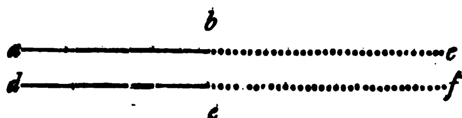
derhalve $ab = ef = gh$

2. Als twee dingen even groot zijn, en een van beide grooter of kleiner dan eene derde grootheid is, dan zal ook de andere grooter of kleiner, dan deze derde grootheid zijn.

3.

3. Als gelijke dingen bij gelijke worden geteld, zijn de sommen gelijk.

Anmerking. Men kan ook figuren ter opheldering stellen, en aldus te werk gaan:



$$\begin{array}{rcl} ab & = & de \\ bc & = & ef \\ \hline ab + bc & = & de + ef \\ \text{of} \quad ac & = & df \end{array}$$

4. Als gelijke dingen van gelijke worden afgetrokken zijn de resten gelijk.

$$\begin{array}{rrcl} \text{a: is, van} & 8 + 6 & = & 14 \\ \text{getrokken} & 5 + 3 & = & 8 \\ \hline \text{blijft} & 3 + 3 & = & 6 \end{array}$$

5. Als ongelijke dingen bij gelijke worden gesteld, zijn de sommen ongelijk.

6. Als gelijke dingen van ongelijke worden afgetrokken, of ongelijke dingen van gelijke, zijn de resten ongelijk.

7. Als gelijke dingen met gelijke worden vermenigvuldigd, zijn de producten gelijk.

8.

8. Als gelijke dingen door gelijke worden gedeeld, zijn de quotienten gelijk.

9. Als eene grootheid in verscheidene deelen gedeeld wordt, is het geheel gelijk aan al deze deelen te zamen genomen.

10. Het geheel is grooter dan elk van zijne deelen.



§. 4.

Behandeling van al de te voren gevondene zamenstellingen, ten einde daaruit de eigenschappen te vinden, die aan dezelve voorkomen.

Het is duidelijk, dat men hier weder den eenvoudigen gang, in de vormleer tot hiertoe in acht genomen, behoort te volgen, en dat men dus met de enkelvoudigste zamenstelling van lijnen begint. In ieder dier zamenstellingen tracht men alle eigenschappen te vinden, die daarin liggen, dezelve naauwkeurig te bepalen en zoo streng mogelijk te bewijzen.

De methode, welke hierbij wordt in acht genomen, is alleen de heuristische (*), het ware kenmerk van de Pestalozzische leerwijze. Hetgene hier volgt is, om niet te omslagtig te zijn, geenszins voorgedragen in den vorm van werkelijk handelende; maar alleen als aanwijzende wat in den genoemden geest moet behandeld worden. Het blijft dus den onderwijzer aanbevolen, de behandeling naar onderwerp en kind verstandelijk te wijzigen.

Nog

(*) Zie DENZEL, *Grondbeginselen van Opvoeding en Onderwijs voor Schoolonderwijzers.* Tweede Druk. Te *Amsterdam*, bij J. VAN DER HEY en Zoon. Bladz. 269.

Nog dient vooraf herinnerd te worden, dat men zoo veel mogelijk alle herhalingen moet trachten te vermijden, en men dus eene eigenschap, die in eene voorgaande figuur voorgekomen en bewezen is, in eene volgende slechts behoeft te noemen, en als reeds bewezen voor waarheid houden.

Van lijnen en hoeken.

Eigenschappen van twee lijnen in een punt met twee hoeken.

(Zie fig. 4 en 5.)

a. Twee lijnen in een punt kunnen twee gelijke hoeken maken.

b. Twee lijnen in een punt kunnen twee ongelijke hoeken maken.

c. De som dezer hoeken is in beide aan elkander gelijk. (Dit blijkt uit bepaling 11 en ax. 9.)

d. De som der hoeken is gelijk aan twee regten. Dit wordt duidelijker door in fig. 5 de perpendiculair *fi* te stellen, en bewezen door *bep.* 12 en *ax* 9.

Met vier hoeken.

Van deze twee gevallen is niets nieuws te zeggen, dan alleen, dat wanneer, in het tweede geval, de ſtompe hoeken gelijk zijn, de ſcherpe ook gelijk moeten wezen.

Met vijf hoeken.

Van deze vier gevallen wordt alleen betoogd, dat de hoeken te zamen gelijk vier regten zijn; alsmede dat derzelver ſom, ter wederzijde van doorgehaalde lijnen, gelijk is.

Met zes hoeken.

Hier wordt gelet op de ſom van allen, op de ſom ter wederzijde van de doorgehaalde lijnen, en op de gelijkheid der tegen over elkander ſtaande hoeken.

Eigenſchappen van drie lijnen in twee punten, met twee hoeken.

(Zie fig. 8.)

De geſteldheid dezer figuren levert niets bijzonders op, dan ingeval de beide opſtaande lijnen evenwijdig zijn; dan tracht men te bewijzen:

Dat $\angle\, dab + \angle\, abc = 2 \llcorner$ zijn.

Om

Om dit te doen, verlengt men de lijn *ab* tot *f*, en toont uit de gelijke helling of neiging, die *ad* tot *ab* en *bc* tot *bf* heeft, dat ∠ *dab* = ∠ *cbf* is, waaruit dan verder het overige volgt.

Aanmerking. Men tracht spoedig de evenwijdige lijnen in de figuren te brengen, omdat zonder die zoo weinig met zekerheid omtrent de grootte en overeenkomst der hoeken te zeggen is. Het is ook daarom, dat men zich hier met een minder naauwkeurig bewijs te vreden houdt.

Met drie hoeken.

In al de figuren, van dit geval is niets op te merken, dan wanneer men twee evenwijdige lijnen trekt, zie fig. 9.

In deze figuur is *ab* evenwijdig met *cde* gesteld, en dus moet bewezen worden, dat ∠ *abd* = ∠ *bde* is.

$$\angle\, abd + \angle\, cdb = 2 \llcorner$$
$$\angle\, cdb + \angle\, bde = 2 \llcorner$$

$$\text{Dus } \angle\, abd + \angle\, cdb = \angle\, cdb + \angle\, bde$$
$$\angle\, cdb = \angle\, cdb$$

$$\text{Derh. } \angle\, abd = \angle\, bde$$

Dat is wanneer twee parallele lijnen door eene derde worden zamengevoegd, en, met deze, drie hoe-

hoeken maken, dan zijn de verwisſelende hoeken even groot.

Met vier hoeken.

De figuren tot dit geval behoorende hebben dit:

a. De vier hoeken zijn te zamen gelijk vier regten.

b. Wanneer twee lijnen evenwijdig getrokken worden, dan zijn de verwisſelende hoeken even groot.

Met vijf hoeken.

Onder al de figuren is deze alleen belangrijk. (Zie fig. 10.) Hier zijn weder twee lijnen evenwijdig, en men moet aantoonen, welke hoeken te zamen gelijk 2 ∟ zijn, aan welke hoeken $\angle e$ gelijk is, en welke hoeken te zamen = 4 ∟ zijn.

Met zes hoeken.

(Zie fig. 11 en 12.)

Van de gevallen, die hier voorkomen, worden alleen deze twee genomen.

De onderwijzer ſpoort zijne kinderen aan in deze figuren, waarin twee lijnen evenwijdig genomen zijn, vele waarheden op te zoeken. Vooral wordt niet vergeten te bewijzen, dat de ſom der hoeken gelijk 6 ∟ is; dat in fig. 11. $\angle a + \angle b = \angle e + \angle f$ is;

is; dat $\angle e = \angle d = \angle a$ en $\angle f = \angle c = \angle b$ is, waaruit dan volgt, dat in zulke gevallen, de uit- en inwendig tegen over elkander liggende hoeken gelijk zijn.

In fig. 12 is verder $\angle e = \angle d = \angle a$, waaruit volgt dat de uitwendig verwisfelende hoeken aan elkander gelijk zijn. Ook is $\angle f = \angle c$, en daarom de inwendig verwisfelende hoeken aan elkander gelijk.

Aanmerking. In deze gevallen zijn de hoeken door enkelde letters aangewezen, niet om aan te toonen, dat men in alle gevallen dus behoort te werk te gaan, maar om te doen zien, dat somtijds het gebruik derzelve eenen grooten fpoed in de bewerking geeft.

Met acht hoeken.

Al hetgene deze figuren in zich bevatten, is reeds te voren opgemerkt, evenwel kan men het de kinderen nog eens laten opgeven. Het eenige, wat nog niet kon voorkomen, is, dat de hoeken te zamen gelijk 8 ⌊ zijn.

Eigenfchappen van drie lijnen in drie punten met drie hoeken.

De figuren, die hier voorkomen, leveren geene nieuwe eigenfchappen op, die hier behandeld kunnen

nen worden. Over de eigenschappen der driehoeken is het hier de plaats niet om te spreken.

De verdere figuren met vier, vijf, zes, zeven, acht en negen hoeken hebben mede niets bijzonders.

Met bijvoeging van de woorden bijna en ruim, kan men de kinderen nog iets laten zeggen, en van drie figuren de som der hoeken opgeven.

Eigenschappen van vier lijnen in een punt met drie hoeken.

Naardien hier weder weinig voorkomt, dat te voren niet is besproken, zoo doet men hier slechts eenige vragen over de grootte der hoeken; waarop toch niet dan onbepaalde antwoorden kunnen gegeven worden: in een geval kunnen zij juist gelijk eenen regten zijn.

Met vier hoeken.

Men kan zich hiermede tot de som der hoeken bepalen, die nu eens gelijk 4 ∟, dan weder gelijk 2 ∟ is. Ook kan men eenige vragen over de gemaakte figuren doen, b. v., als de eene hoek regt of 90° is, en de overige zijn even groot; hoe veel graden bevat dan ieder? — Hoe veel gra-

graden bevat iedere hoek, wanneer zij allen even groot zijn?

Met vijf, zes, zeven en acht hoeken.

Hierbij komt niets voor, dan hetgene reeds aan vorige figuren gevonden is. Men kan eenige hoeken bepalen, en dan naar de grootte der anderen vragen. Ook kan men in het laatste geval de hoeken allen gelijk stellen en naar de grootte van ieder vragen, die dan = 45° is.

Eigenschappen van vier lijnen in twee punten met drie hoeken.

(Zie fig. 13.)

Al de figuren leveren niets op, dan hetgene hier boven gesteld is, in geval men *ab* evenwijdig met *cd* stelt, alsdan is ∠ *abc* = ∠ *bcd*, en wanneer ∠ *bcd* = ∠ *dce* is, dan is ook ∠ *abc* = ∠ *dce*; ook is dan ∠ *bce* tweemaal zoo groot als ∠ *abc*.

Met vier hoeken.

(Zie fig. 14, 15 en 16.)

Hier neemt men weder de twee voornaamste gevallen, die zich onder het bewerken voordoen.

Fig.

Fig. 14. De parallele lijnen vooronderstellende, is

$$\angle fcb + \angle bcd + \angle dce = 2 \llcorner$$

$$\angle fcb + \angle abc + \angle dce = 2 \llcorner$$

Fig. 15. Als *ab* evenwijdig is met *ef* en $\angle cbe = \llcorner$, dan is daarin het volgende:

$$\angle abc + \angle cbe = \angle bef$$

$$\angle abe = \angle bef$$

$\angle abc + \angle ebd = \angle cbe = \llcorner$

$\angle cbe =$ de helft van de som der hoeken.

dbe + *bef*

$$\angle cbe = \frac{\angle dbe + \angle bef}{2}$$

$\angle abc + \angle cbe + 2 \angle ebd + \angle bef = 4 \llcorner$

Ook is $\angle abc + \angle bef + 2 \angle ebd = 3 \llcorner$

Fig. 16. Wanneer $\angle a + \angle b = \llcorner$ is,

Zoo is $\angle c + \angle d + \angle a + \angle b = 3 \llcorner$

Verder is $\dfrac{\angle c + \angle d}{2} = \angle a + \angle b = \llcorner$

Ook is $\angle b + \angle c = \llcorner$

Met

Met vijf hoeken.

(Zie fig. 17, 18, 19, 20.)

Fig. 17. De lijnen zijn niet parallel. De $\angle b = \angle e$ genomen en $\angle c$ regt gesteld. Hieruit tracht men te vinden wat er in ligt, en laat bepalen, dat de som der hoeken gelijk 6 ∟ is.

Fig. 18. In deze is *de* parallel met *ab* en $\angle\, cdf = $ ∟

Daardoor $\angle\, acd = \angle\, fde$.

$\angle\, fde + \angle\, cde = 3$ ∟

$$\frac{\angle\, acd + \angle\, dcb}{2} = \angle\, cdf.$$

$\angle\, cde + \angle\, bcd + \angle\, cdf = 3$ ∟

$\angle\, acd + \angle\, dcb + \angle\, cdf = \angle\, fde + \angle\, cde.$

$\therefore\ \angle\, fde + \angle\, bcd = 2$ ∟

Fig. 19. Hier zijn mede twee parallele lijnen en $\angle\, d = \angle\, e$.

$\angle\, c + \angle\, i + \angle\, a = 4$ ∟

$\angle\, c + \angle\, a - \angle\, e = 2$ ∟

Fig.

Fig. 20. De twee horizontale lijnen zijn parallel, ∠ *d* = ∠ *b* en te zamen = ⊾, dan heeft men

∠ *c* + ∠ *a* = 2 ⊾
∠ *c* + ∠ *b* = 2 ⊾
∠ *d* = ∠ *c* = $1\frac{1}{2}$ ⊾
∠ *e* = $1\frac{1}{2}$ ⊾

De ſom der hoeken plus ∠ *a* is = 6 ⊾
De ſom der hoeken = $5\frac{1}{2}$ ⊾

Al wat verder hierbij voorkomt bevat geene nieuwe eigenſchappen, en wordt daarom vlugtig behandeld.

Eigenſchappen van vier lijnen in drie punten met drie hoeken.

Hier begint het onderwerp zeer belangrijk te worden, naardien, uit deze vereeniging van lijnen, verſcheidene voorname eigenſchappen van de driehoeken, vierhoeken, enz. ontſtaan. Wij zullen daarom dit ook iets breeder voordragen.

(Zie fig. 21, 22, 23, 24.)

Fig. 21. Wanneer *ab* parallel met *cd* en *bc* met *de* is,

Dan is ∠ *abc* = ∠ *cde*.
Een der hoeken is $\frac{1}{4}$ der ſom van allen.

Fig.

Fig. 22. Hier is *de* parallel met *bc* en *ab* parallel met *cd*. Dan is $\angle\, abc = \angle\, bcd$.

en $\angle\, abc + \angle\, bcd + 2\, \angle\, cde = 4\, \llcorner$

Fig. 23. Laat *ag* parallel met *cd* zijn,

dan is $\angle\, gab + \angle\, abc + \angle\, bcd = 4\, \llcorner$

Om dit te bewijzen ſtelt men de hulplijn *ef*, paralel met *ag*.

Indien de $\angle\, abc = \llcorner$ is

dan is $\angle\, gab + \angle\, bcd = 3\, \llcorner$

Fig. 24. In dit geval is *ag* parallel met *cd*, en $\angle\, abc = \llcorner$. Dan heeft men $\angle\, gab + \angle\, abc + \angle\, bcd = 2\, \llcorner$

Om dit te bewijzen ſtelt men *ef* parallel aan *ag*.

Met vier hoeken.

(Zie fig. 25 en 26.)

Fig. 25. Laten de lijnen *ab* en *cd*, alsmede *bc* en *ef* parallel zijn; dan heeft men:

$\angle\, abc = \angle\, bcd$, $\angle\, cdf + \angle\, cde = 2\, \llcorner$

$\angle\, bcd = \angle\, cdf$, $\angle\, bcd + \angle\, cde = 2\, \llcorner$

$\angle\, abc = \angle\, cdf$, $\angle\, abc + \angle\, cde = 2\, \llcorner$

Fig. 26. Laat *ad* parallel met *bc* zijn.

Dan is $\angle\, bca = \angle\, cad$.

$\angle\, abc + \angle\, bca + \angle\, bac = 2\, \llcorner$

Als *abc* een gelijkhoekige driehoek is,

dan is iedere hoek $= \frac{2}{3}\, \llcorner$

en $\angle\, abc + \angle\, bca + \angle\, bac + \angle\, cad = 2\frac{2}{3}\, \llcorner$

Met

Met vijf hoeken.

(Zie fig. 27, 28, 29 en 30.)

Fig. 27. Laat *ab* parallel aan *cd* en *ef* parallel aan *bg* zijn, dan heeft men:

$\angle\ afe + \angle\ efb = 2\ \llcorner$

$\angle\ cgb + \angle\ bgd = 2\ \llcorner$

$\angle\ efb = \angle\ bgd$

en $\angle\ afe = \angle\ cgb$.

Ook is $\angle\ afe + \angle\ bgd = 2\ \llcorner$

$\angle\ cgb + \angle\ efb = 2\ \llcorner$

Fig. 28. Laat *fg* parallel met *ab* zijn.

Dan is $\angle\ cab = \angle\ fca$ en $\angle\ abc = \angle\ bcg$.

Daarom $\angle\ bac + \angle\ abc + 2\ \angle\ acb + \angle\ bcg + \angle\ acf = 4\ \llcorner$

Fig. 29. Laat de lijn *cd* evenwijdig zijn met *ae*, dan is:

$\angle\ cbe = \angle\ cab + \angle\ acb$

wanneer $\angle\ bac = \angle\ abc$ is

dan is $\angle\ acb + \angle\ abc = \angle\ cbe$.

Fig. 30. In deze is *bd* evenwijdig met *ac*. Daardoor heeft men

$\angle\ cbd + \angle\ dbe = \angle\ bac + \angle\ acb$.

of $\angle\ cbe = \angle\ bac + \angle\ acb$.

$\angle\ bac + \angle\ abc + \angle\ acb = 2\ \llcorner$

$\angle\ bac + 2\ \angle\ abc + \angle\ acb + \angle\ cbd + \angle\ dbe = 4\ \llcorner$

Op

Op deze wijze kan men de figuren uitzetten en zeer belangrijk maken. Het is eene onuitputbare ſtof ter opſcherping van de verſtandsvermogens. Men leidt hier langs den natuurlijken weg tot nieuwe ontdekkingen, zonder voor te praten, of het duistere half aan het licht te brengen.

Men kan hier met de kinderen nu eenen ſtap terug doen en zich bepalen tot drie lijnen in drie punten met 4, 5, 6, enz. hoeken, alzoo daarin eigenſchappen liggen, die te voren niet konden opgenomen worden. Maar oordeelt de onderwijzer het voor zijne kinderen niet noodig, dan gaat hij over tot

Met zes hoeken.

(Zie fig. 31 en 32.)

Fig. 31. In deze zijn de vier lijnen twee aan twee aan elkander evenwijdig.

Men heeft de ſom der hoeken = 6 ∟

∠ *abf* + ∠ *cdg* = 2 ∟

en ∠ *abc* + ∠ *cdh* = 2 ∟

Fig 32. In deze figuur zijn wel geene nieuwe waarheden te ontdekken; maar het is zeer nuttig de gevondene hier nog eens te laten herhalen.

Met zeven hoeken.

(Zie fig. 33.)

In deze is de lijn *cd* evenwijdig aan *af* getrokken. Daardoor heeft men:

$$\text{de som der hoeken} + \angle\, abf = 6\, \llcorner$$
$$\angle\, fbe + \angle\, ebc = \angle\, baf + \angle\, afb$$
$$\angle\, abd = \angle\, baf$$
$$\angle\, dbc = \angle\, abf + \angle\, afb$$
$$\angle\, dbc + \angle\, baf = 2\, \llcorner$$

Met acht hoeken.

(Zie fig. 34.)

Als waarheden kunnen hier bewezen worden:

$$\angle\, a + \angle\, c = \angle\, d + \angle\, e$$
$$\angle\, a + \angle\, o = \angle\, i + \angle\, e$$
$$\angle\, e + \angle\, d = \angle\, i + \angle\, c$$
$$\angle\, e + \angle\, b = \angle\, o + \angle\, n$$

enz.

Op deze wijze gaat men voort met vier lijnen in drie punten met 9, 10, 11, 12, 13 en 14 hoeken, en laat de kinderen alles opnoemen, opschrijven en be-

bewijzen, wat zij aan de onderscheidene figuren ontdekken. Ziet men echter, dat de kinderen die uitgebreidheid niet behoeven, dan gaat men spoediger tot het volgende over.

Voor dat de onderwijzer tot vier lijnen in vier punten overgaat, behoort hij hier de voornaamste waarheden, die als algemeen kunnen aangenomen worden, onder bewoordingen te laten brengen. Want het is noodzakelijk, dat men den kinderen vroeg leert, algemeene waarheden door algemeene woorden uit te drukken. Zij zijn:

1. Wanneer twee regte lijnen elkander zoodanig ontmoeten, dat zij twee hoeken maken, dan zijn die twee hoeken gelijk twee regte hoeken.

2. Wanneer twee regte lijnen elkander zoodanig ontmoeten, dat zij vier hoeken maken, dan zijn die te zamen gelijk vier regten.

3. Wanneer twee regte lijnen zijn als voren, dan zijn de tegenover elkander staande hoeken gelijk.

4. Wanneer twee regte lijnen evenwijdig zijn en door eene derde zoodanig worden ontmoet, dat zij drie hoeken maken, dan zal de uitwendige hoek gelijk aan den tegenoverstaanden inwendigen zijn, en de som der beide inwendige hoeken is te zamen gelijk aan twee regten.

5. Wanneer twee regte lijnen evenwijdig zijn, en door eene derde zoodanig worden gesneden, dat zij acht hoeken maken, dan zijn:

a. De inwendig verwisselende hoeken even groot.

b. De uitwendig verwisselende hoeken even groot.

c. Iedere uitwendige hoek is gelijk aan zijn tegenoverstaanden inwendigen, die met hem aan denzelfden kant der snijdende lijn staat.

d. De beide binnenhoeken, die aan denzelfden kant der snijdende lijn staan, te zamen genomen, maken twee regte hoeken uit.

e. De beide buitenhoeken, die aan denzelfden kant der snijdende lijn staan, zijn te zamen genomen gelijk aan twee regten.

d. Een binnenhoek en een verwisselende buitenhoek zijn te zamengenomen gelijk aan twee regte hoeken.

6. Wanneer twee regte lijnen aan eene en dezelfde regte lijn evenwijdig zijn, dan zijn zij ook evenwijdig aan elkander.

7. De driehoeken van eenen driehoek zijn te zamen gelijk aan twee regte hoeken.

8. Wanneer een der zijden van eenen driehoek verlengd wordt, dan is de uitwendige hoek gelijk de twee tegenoverstaande inwendige hoeken.

Al die bewezene waarheden worden op de beste wijze onvergetelijk ingedrukt, wanneer men eenige voorstellen laat bewerken, waarin dezelve den grondslag uitmaken. En om die eene meerdere ruimte te geven, neemt men aan, dat van eenen gelijkzijdigen driehoek de hoeken aan elkander gelijk zijn.

VOOR-

VOORSTELLEN.

1. Wanneer (fig. 4.) de beide hoeken, ieder gelijk eenen regten zijn, hoe veel graden zijn zij dan te zamen?

2. Indien de ∠ *efg* = 103° 51′ is (fig. 5.) hoe groot is dan ∠ *gfh*?

3. Zoo men ∠ *gfh* = 30° 4′ ſtelt, hoe groot is dan ∠ *efg*?

4. Als men (fig. 7.) ∠ *aed* = 56° 15′ ſtelt, hoe groot zijn dan de overige hoeken?

5. Gegeven zijnde (fig. 8.) ∠ *abc* = 37° 13′, hoe groot is dan ∠ *dab*?

6. Indien in fig. 9, ∠ *abd* = 84° 17′ is, hoe groot zijn dan de andere hoeken?

7. Wanneer in fig. 10, ∠ *e* = 45° 16′ is, hoe groot zijn dan de andere hoeken?

8. Vooronderſtellende dat de drie hoeken aan het punt *c*, (fig. 14.) aan elkander gelijk zijn, vraagt men naar de grootte van al de hoeken, ieder op zichzelven.

9. Als ∠ *dbe* (fig. 15.) = 62° 18′ is, hoe groot zijn dan de andere hoeken?

10. Zoo men (fig. 18.) ∠ *bcd* = 43° 31′ ſtelt, hoe groot zijn dan de andere hoeken?

11. Wanneer, in fig. 19, ∠ *a* = 132° 24′ is, hoe groot zijn dan de andere hoeken?

12. Wanneer van eenen driehoek *abc*, de ∠ *a* = 56° 15′ en ∠ *b* = 72° 30′ is, hoe groot is dan ∠ *c*?

13. Indien in eenen regthoekigen driehoek *abc*, ∠ *b* regt is, en ∠ *a* = 37° 13′; hoe groot is dan ∠ *c*?

14. Als van eenen ſtomphoekigen driehoek de ſtompe hoek 125° 45′ is, hoe groot is dan de ſom der beide andere hoeken? En zoo die hoeken gelijk zijn, hoe groot is dan ieder?

15. Zoo van eenen ſtomphoekigen driehoek, twee hoeken gelijk zijn, en ieder = 25° 15′; hoe groot is dan de ſtompe hoek?

16. Wanneer van eenen regthoekigen driehoek twee hoeken even groot zijn, hoe groot is dan iedere hoek?

17. Als van eenen driehoek, de hoeken op de baſis even groot zijn, en de tophoek = 33° 15′ is, hoe groot zijn dan de overige?

18. Wanneer van zoodanigen driehoek een hoek aan de baſis = 67° 30′ is, hoe groot zijn dan de andere?

19. Hoe groot zijn ieder der hoeken van eenen gelijkzijdigen driehoek?

Men kan de grootheid der hoeken ook bepalen door dezelve met eenen regten hoek te vergelijken, en daarover de volgende vragen doen.

1. Wanneer een regthoekige driehoek twee gelijke hoeken heeft, welk gedeelte van eenen regten doet ieder derzelve?

2. Wanneer van eenen regthoekigen driehoek de eene ſcherpe hoek $= \frac{1}{3}$ ⌞, $\frac{1}{4}$ ⌞, $\frac{1}{5}$ ⌞, $\frac{1}{6}$ ⌞, $\frac{1}{7}$ ⌞, enz. is, hoe groot is dan de andere?

3. Indien van eenen ſtomphoekigen driehoek de ſtompe hoek $= \frac{19}{15}$ ⌞ en een ſcherpe $= \frac{7}{15}$ ⌞ is, hoe groot is dan de derde?

4. Wanneer een ſtomphoekige driehoek twee gelijke hoeken heeft, en ieder $= \frac{7}{15}$ ⌞ is, hoe groot is dan de andere?

5. Wanneer (fig. 29.) $\angle\ cbe = \frac{18}{11}$ ⌞ is en $\angle\ bac =$ [illegible] ⌞; hoe groot zijn dan de andere?

Eigenſchappen van vier lijnen in vier punten met vier hoeken.

(Zie fig. 35—40.)

Fig. 35. Dit is een onregelmatige vierhoek, getrokken zonder bepaling. In deze is

$$\angle\ bac + \angle\ abc + \angle\ bcd + \angle\ cda = 4 ⌞$$

omdat iedere vierhoek tot twee driehoeken kan gebragt worden.

Fig. 36. Van dezen vierhoek zijn de tegenover-elkander ſtaande zijden evenwijdig. Daardoor is

$$\angle\, bac = \angle\, bdc$$
$$\text{en } \angle\, acd = \angle\, abd.$$

Fig. 37. Deze vierhoek heeft eenen uitwendigen hoek, welke gelijk is aan de drie inwendige hoeken. Dat is $\angle\, adb = \angle\, acb + \angle\, cbd + \angle\, dac$.

Aanmerking. Men behoeft in deze figuur zich niet alleen te bepalen tot het trekken van de hulplijn *ce*, naardien hetzelfde kan bewezen worden, wanneer er andere lijnen getrokken zijn. Zie figuur 38—40. Op zulke verſchillende middelen maakt de onderwijzer zijne kinderen vooral opmerkzaam, ten einde hen de zaken van de meest mogelijke zijde te doen zien, en het verſtand de grootſte vrijheid in eigen overleg en eigene werkzaamheid te laten.

Met vijf hoeken.

(Zie fig 41.)

In deze figuur laat men de kinderen al wat gelijk is opzoeken, en de ſom der hoeken van twee aan twee bepalen, alsmede die van allen opgeven.

Met

Met zes hoeken.

(Zie fig. 42—46.)

De figuren, die aan dit geval beantwoorden, zijn zoo menigvuldig, als men zelf verkiest; maar allen zijn niet even vruchtbaar voor het verſtand. Hierdoor is het, dat al de goede uitwerkſelen van dit deel der vormleer van den onderwijzer zelf afhangen, naardien hij kennis en doorzigt genoeg moet hebben, om eene goede keuze te doen, en den gang der denkbeelden te leiden tot het ware doel. Het blijkt ook hieruit, dat geen onderwijzer, die de zaak niet beoefend heeft, dit deel van het onderwijs aan kinderen moet voordragen, opdat hij niet veel meer afbreke dan opbouwe.

De figuren boven opgegeven worden aldus behandeld. Men laat door de kinderen de hoeken bepalen:

Fig. 42. Van eenen gelijkzijdigen driehoek, wiens tophoek midden door gedeeld is.

Fig. 43. Van eenen regthoekigen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek midden door gedeeld is.

Fig. 44. Hetzelfde van eenen ſcherphoekigen gelijkbeenigen driehoek, welks tophoek bepaald is.

Fig. 45. Van eenen ſtomphoekigen gelijkbeenigen driehoek, welks ſtompe hoek bepaald is.

Fig. 46. Daarna van eenen regthoekigen ongelijk-

lijkzijdigen driehoek, mits men eenen hoek bepaalt aan de lijn, die uit den regten hoek perpendiculair op de tegenoverſtaande zijde valt.

Aanmerking. Wanneer de kinderen dit goed begrijpen, kan men die hoeken in ongelijke deelen verdeelen, mits de betrekking bepalende. Hierdoor wordt de zaak wel eenigzins moeijelijker, maar door het voorgaande wordt het gemakkelijk gevonden.

Men zou hier het volgende even zoo breed kunnen aanwijzen, en toonen wat het belangrijke is in vier lijnen, in vier punten met zeven tot achttien hoeken ingeſloten, als ook wat er ontſtaat, wanneer men vier lijnen in vijf punten met zes hoeken heeft. Maar welke nuttigheid zou dit hebben? De onderwijzer, die bij de behandeling der vormleer, tot hiertoe nog niet geleerd heeft, in deze van het voorgaande tot het volgende te beſluiten, kan dit gerust ter zijde leggen, en die reeds zoo verre is gekomen behoeft geene breedere uitzetting. Daarenboven was ons oogmerk ſlechts eene handleiding voor onderwijzers te leveren, waardoor zij al bewerkende de zaak zich zouden eigen maken; maar geenszins dat men blootelijk het boek even zou behoeven in te zien, om te weten wat men de kinderen, nu weder moet voordragen. Zulke ezelsbruggen kunnen nimmer het onderwijs gepast bevorderen. Wij gaan daarom over tot de

Eigen-

Eigenschappen van vier lijnen in vijf punten met zeven hoeken.

(Zie fig. 47—53.)

Wanneer in de bovenstaande figuren, de vierde lijn evenwijdig aan eene der zijden getrokken wordt, dan kunnen de hoeken zijn:

Fig. 47. In eenen gelijkzijdigen driehoek, 5 gelijk en 2 gelijk.

Fig. 48. In eenen scherphoekigen gelijkbeenigen driehoek, 4 gelijk, 2 gelijk en 1 ongelijk.

Fig. 49. In eenen regthoekigen gelijkbeenigen driehoek, 3 gelijk, 3 gelijk en 1 ongelijk.

Fig. 50. In eenen stomphoekigen gelijkbeenigen driehoek, 3 gelijk, 2 gelijk en 2 ongelijk.

Fig. 51. In eenen scherphoekigen ongelijkzijdigen driehoek, 2 gelijk, 2 gelijk en 3 ongelijk.

Fig. 52. In eenen regthoekigen driehoek, 3 gelijk, 2 gelijk en 2 ongelijk.

Fig. 53. In eenen stomphoekigen driehoek, 2 gelijk, 2 gelijk en 3 ongelijk.

Met acht hoeken.

(Zie fig. 54.)

Als *ab* evenwijdig met *cd* is, en de hoeken om het punt *e* regt zijn, dan is de som der hoeken = 6 ∟.

De

De ſom der ſcherpe hoeken is gelijk de helft der regte.

De verdere waarheden die hier voorkomen zijn reeds behandeld.

Aanmerking. Wij zouden hier zeer uitvoerig kunnen zijn, wanneer wij ten doel hadden meerder te geven, dan eene aanwijzing voor onderwijzers. Maar dit is geenszins ons oogmerk, en het is ook daardoor, dat wij de verdere bewerking van 4 lijnen in 5 punten geheel voor den onderwijzer overlaten.

Eigenſchappen van vier lijnen in zes punten met elf hoeken.

(Zie fig. 55.)

Van deze figuur bepaalt men 2 of 3 hoeken, naar men dit noodig oordeelt, dan eens deze, dan weder gene hoeken, en laat de andere hoeken door de kinderen berekenen, doende hen daarbij de reden van de bewerking zeggen.

Dit zet men voort tot het meeste getal van hoeken; offchoon hier niet veel bij op te merken is, wat niet te voren werd bewezen.

Eigen-

Eigenſchappen van vijf lijnen in vijf punten met vijf hoeken.

(Zie fig. 56—61.)

Hoe verder men komt, hoe meer zich ter bewerking aan onderwijzer en kind aanbiedt. Daarom is hier en vervolgens de meeste oplettendheid noodig om eene goede keus uit de menigte der figuren te doën, ten einde die achter te laten, welke geene nieuwe waarheden bevatten, of die geene nieuwe gezigtpunten geven. Wij bepalen ons tot deze zeven figuren.

De ſom der hoeken van eenen vijfhoek is altijd gelijk 6 ∟.

Fig. 56. Verdeel den vijfhoek in drie driehoeken, dan is de ſom der hoeken van iederen driehoek = 2 ∟, en dit 3 maal genomen is = 6 ∟.

Wanneer de vijfhoek regelmatig is, en dus de vijf hoeken aan elkander gelijk zijn, dan is iedere hoek = $1\frac{1}{5}$ ∟.

Fig. 57. Of verdeel den vijfhoek in eenen driehoek en eenen vierhoek.

Fig. 58. Of verdeel den vijfhoek in twee vierhoeken, en de ſom der hoeken is even zoo gemakkelijk door het te voren geleerde te vinden.

Fig. 59. Als de vijfhoek eenen uitwendigen hoek heeft en de zijde *ae* evenwijdig aan *df* is, dan

dan is de ſom der hoeken gelijk 4 $\llcorner$. Stel *bc* evenwijdig met *ae* en *df*,

$$\text{dan is } \angle abc = \angle eab$$
$$\angle cbd = \angle bdf$$

$$\text{dus } \angle abc + \angle cbd = \angle eab + \angle bdf$$
$$\angle abc + \angle cbd = \llcorner .$$

$$\text{blijft } \angle eab + \angle bdf = \llcorner$$
$$\angle aeb + \angle efd = 2 \llcorner$$
$$\angle abd = \llcorner$$

$$\text{Komt } \angle a + \angle b + \angle d + \angle f + \angle e = 4 \llcorner$$

Fig. 60. Een vijfhoek zonder evenwijdige zijden. Men verlengt eene lijn, waardoor de vijfhoek in eenen driehoek en vierhoek wordt verdeeld, van welke de ſom der hoeken volgens het te voren bewezene = 6 $\llcorner$ is, en de uitwendige, daarbij gerekend, maakt 7 $\llcorner$; van deze de 3 $\llcorner$ afgetrokken die de hulplijn maakt, blijft 4 $\llcorner$.

Ook is de ſom der inwendige hoeken min de uitwendige = 2 $\llcorner$; want de ſom der inwendige door het trekken van de hulplijn, was = 6 $\llcorner$, hieraf de 3 $\llcorner$, welke de hulplijn maakt, blijft 3 $\llcorner$ en van deze de uitwendige afgetrokken rest nog 2 $\llcorner$.

Fig. 61. Stel de lijn *df* perpendiculair op *ab*, dan kan men bewijzen, dat de uitwendige hoeken twee regte hoeken grooter, dan de inwendige zijn.

Want

Want $\angle aei = \angle edf + \angle afd + \angle eaf$
. $\angle bcd = \angle cdf + \angle dfb + \angle fbc$

Dat is
$\angle aei + \angle bcd = \underline{\underline{\angle edf + \angle cdf}} + \underline{\underline{\angle afd + \angle dfb}} + \angle eaf + \angle fbc$

of $\angle aei + \angle bcd = \angle edc + 2 \llcorner + \angle eaf + \angle fbc$
Derh. $\angle aei + \angle bcd - 2 \llcorner = \angle edc + \angle eaf + \angle fbc.$

Eigenſchappen van zes lijnen in zes punten met zes hoeken.

(Zie fig. 62—65.)

Fig. 62. De zeshoeken van eenen zeshoek zijn gelijk 8 $\llcorner$.

Naardien men eenen zeshoek in twee vierhoeken kan verdeelen, zoo ziet men daaruit zeer gemakkelijk, dat de hoeken van eenen zeshoek = 8 $\llcorner$.

Hieruit is mede af te leiden, dat van eenen regelmatigen zeshoek, iedere hoek $1\frac{1}{3}$ $\llcorner$ bevat.

Fig. 63. In deze figuur is een der hoeken uitwendig, daardoor kan men bewijzen, dat de uitwendige hoek 4 $\llcorner$ kleiner is dan de inwendige hoeken te zamen.

Trek

Trek de lijnen *ce* en *dc*.

dan is

$\angle cca + \angle eac + \angle ace + \angle cdb + \angle dbc + \angle dcb = 4 \llcorner$

$\angle cef + \angle ecd + \angle fdc = \angle efd.$

Derh. de inwendige hoeken $= 4 \llcorner - \angle efd.$

Wanneer de uitwendige hoek regt is, dan is de som der inwendige hoeken $= 5 \llcorner$.

Fig. 64. Hier komen twee uitwendige hoeken voor, waardoor de som der inwendige gelijk die der uitwendige is.

Trek om dit te bewijzen de lijn *ef*.

dan is $\angle eab + \angle abf + \angle aef + \angle efb = 4 \llcorner$

$\angle ecd + \angle cdf + \angle cef + \angle dfe = 4 \llcorner$

Dus

$\angle eab + \angle abf + \angle aef + \angle efb + \angle ecd + \angle cdf + \angle cef + \angle dfe = 8 \llcorner$

$\angle aef + \angle efb \quad + \angle cef + \angle dfe = 8 \llcorner$

$(-(\angle aec + \angle bfd).$

Derh.

$\angle eab + \angle abf \quad + \angle ecd + \angle cdf \quad = \angle aec + \angle bfd.$

Fig. 65. Dit is een zeshoek met drie uitwendige hoeken. Hierin is de som der uitwendige hoeken min $4 \llcorner$ gelijk aan de som der inwendige hoeken. Trek de lijnen *di*, *ei* en *fi*.

Dan is $\angle daf = \angle afi + \angle adi + \angle dif.$

$\angle fbe = \angle bfi + \angle bei + \angle fie.$

$\angle dce = \angle cei + \angle cdi + \angle die.$

Komt

Komt

$$\angle daf + \angle fbe + \angle dce = \angle afi + \angle bfi + \angle adi + \angle cdi + \angle cei + \angle bei +$$
$$+ \angle dif + \angle fie + \angle die.$$
$$4\,\llcorner = \angle dif + \angle fie + \angle die$$

Blijft

$$\angle daf + \angle fbe + \angle dce - 4\,\llcorner = \underline{\underline{\angle afi + \angle bfi}} + \underline{\underline{\angle adi + \angle cdi}} + \underline{\underline{\angle cei + \angle bei}}$$

Derh.

$$\angle daf + \angle fbe + \angle dce - 4\,\llcorner = \angle afb + \angle ade + \angle bce.$$

Aanmerking. Men zou nu verder tot de zevenhoeken kunnen overgaan, indien men het voor kinderen noodig acht, en daarvan dezelfde soort van eigenschappen trachten op te sporen: doch dit zal voor de meeste kinderen niet behoeven.

Eigenschappen van een onbepaald getal lijnen in even zoo veel punten.

(Zie fig. 66.)

Hierdoor bekomt men eenen veelhoek; en van iederen veelhoek, zonder uitwendige hoeken, is

 de

§. 5.

Verdeeling van hetgene moet volgen.

Al hetgene wij tot hiertoe in vier paragraven hebben voorgedragen, en dat als een regtſtreeks vervolg van de vormleer, in het eerſte Stukje voorkomende, moet aangemerkt worden, kan men tevens beſchouwen als inleiding tot hetgene volgt, namelijk: PESTALOZZI's *Grootheids-leer* (*Gröszen-lehre*) dat is, bij omſchrijving, het bepalen der overeenkomſten van gelijkſoortige grootheden, in verſchillende gevallen. Hieruit blijkt, dat de genoemde paragraven de band uitmaken, waardoor de inhoud van het eerſte Stukje aan hetgene volgt verbonden wordt.

Het kan niet anders, of men moet aldus meer en meer de grenzen van het gebied der meetkunde naderen, en eindelijk daar geheel intreden, ofſchoon altijd dit onderſcheid zal beſtaan: dat, al behandelt men eindelijk niet dan ſtrikte meetkunde, het vormelijke in de voordragt en leiding boven het ſtreng en enkel wetenſchappelijke zal uitſteken. Dit moet dus de onderwijzer ook in het oog houden, en trapswijze de wetenſchap naderen, om daarin geheel te eindigen.

Hetgene hier nog moet volgen, kan geſchikt in vijf deelen verdeeld worden, als:

15. De hoeken van eenen zeshoek zijn altijd te zamen gelijk 8 ∟.

16. Van iederen veelhoek is de som der hoeken gelijk aan tweemaal zoo veel regte hoeken, als de figuur zijden heeft, min 4 ∟.

VOORSTELLEN.

1. Hoe veel graden bevatten te zamen de hoeken van eenen regelmatigen vijfhoek?

2. Hoe veel graden is iedere hoek van eenen regelmatigen vijfhoek?

3. Hoe veel graden is iedere hoek van eenen regelmatigen zeven-, acht-, tien- en vijftienhoek?

4. Hoe veel graden is iedere hoek van eenen regelmatigen dertienhoek?

5. Hoe groot is iedere hoek van de driehoeken voorkomende in fig. 66?

of als de afſtanden, die zij voorſtellen, even groot zijn.

Ook kan men zeggen, dat twee regte lijnen even lang zijn, wanneer derzelver uiteinden op elkander pasſen.

Aanmerking. Hetgene ten aanzien van de overeenkomst van lijnen verder gezegd kan worden, als: hoe dat lijnen in opzigt tot hare lengte kunnen zijn, namelijk: *gelijk* en *ongelijk*. Hoe dat drie lijnen kunnen zijn; hoe de overeenkomſten van vier, vijf, zes, enz. lijnen kunnen zijn; dit alles komt ons voor als eene onnoodige uitbreiding van hetgene reeds geleerd is. Hen, die hierover willen lezen, verwijzen wij naar *Die Elemente der Form und Grosze von* JOZEPH SCHMID. *Erster Theil ſeite* 160—174.

§. 7.

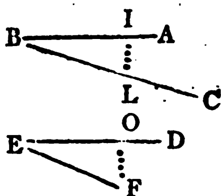
Over de gelijkheid van hoeken op zich zelven.

Twee hoeken zijn gelijk aan elkander, wanneer derzelver eindpalen met elkander overeenkomen, of dat de beenen op elkander pasſen. Ook kan men zeggen, dat twee hoeken aan elkander gelijk zijn, als de bogen, welke dezelve meten (zie bl. 6.) evenveel graden bevatten.

Doch

Doch dit meten van hoeken kan ook door regte lijnen gefchieden, wanneer het doel niet is, om derzelver juiste grootte te weten, maar alleen te bepalen in welke betrekking zij tot elkander ftaan.

Zoo komen twee hoeken met elkander overeen of zijn aan elkander gelijk, als de openingen der beenen, op gelijke afftanden van het vereenigings- of toppunt even groot zijn. Dus is b. v. ∠ ABC gelijk ∠ DEF, wanneer de regte lijnen IL en OF, die de beide hoeken op gelijke afftanden van de punten B en E onderfpannen, even lang zijn.



Van de ongelijkheid der hoeken, alsmede van de overeenkomst van twee, drie, en meer hoeken, behoeft niet gefproken te worden.

---

§. 8.

Gelijkheid van lijnen en hoeken in driehoeken.

Men neemt de achtervolgende foorten van driehoeken, beginnende met den

gelijkzijdigen driehoek.

Van eenen gelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken aan elkander gelijk.

(Zie fig 67.)

Bewijs. Op gelijke afſtanden zijn de hoeken door gelijke lijnen onderſpannen, dus zijn de hoeken gelijk.

Wanneer van eenen driehoek de hoeken gelijk zijn, dan zijn ook de zijden gelijk.

(Zie fig. 67.)

Bewijs. De drie hoeken *abc*, *acb* en *bac* zijn gelijk. De zijde *ab* heeft dezelfde neiging tot *bc*, als *ac* tot *bc*, naardien $\angle$ *abc* = $\angle$ *acb* is. Dus loopen de lijnen *ab* en *ac* in gelijke rigting ten opzigte van *bc* naar elkander toe en ontmoeten eindelijk elkander in een punt (*a*) dat zoo verre van *b* als van *c* verwijderd is. Wanneer de uiteinden van eene lijn zoo verre van elkander verwijderd zijn, als die van eene andere, dan zijn die lijnen aan elkander gelijk, dus ook hier *ab* = *ac*. Dit bewijst men op dezelfde wijze van *ab* en *bc*, derhalve de drie zijden onderling aan elkander gelijk,

---

Ge-

Gelijkbeenige driehoek.

Van eenen gelijkbeenigen driehoek zijn de hoeken aan de bazis gelijk.

(Zie fig. 68, *a*.)

Bewijs. De ∠ *b* wordt op de afſtanden van *ab* en *bc* bepaald door *ac*; de ∠ *a* wordt op de afſtanden van *ab* en *ac* bepaald door *bc*. Nu is *ac* = *bc* gegeven, derhalve ∠ *bac* = ∠ *abc*.

Hierbij kan men nu ook het omgekeerde voegen, namelijk: *wanneer in eenen driehoek, de hoeken aan de bazis gelijk zijn, dan is het een gelijkbeenige driehoek.*

Aanmerking. De onderwijzer kan, in de behandeling dezer eigenſchappen, aldus te werk gaan, zonder in het minst verpligt te wezen, zich bij voortduring daaraan te moeten houden.

O. (Schrijft eenen gelijkzijdigen driehoek op.) Met welk eene ingeſlotene figuur moeten wij beginnen?

K. Met eenen driehoek, meester!

O. Welke ſoorten van driehoeken heeft men?

K. Gelijkzijdige, gelijkbeenige, enz.

O. Met welke behooren wij te beginnen?

K. Met den gelijkzijdigen driehoek.

O. Zeer goed. Wij ſpraken te voren van de gelijkheid van hoeken en lijnen op zich zelven; maar kunt gij wel van de gelijkheid der lijnen en hoeken in eenen gelijkzijdigen driehoek iets zeggen?

K. Ja, de hoeken zijn gelijk.

O. Dat geloof ik ook, maar kunt gij die waarheid wel bewijzen? Waarom komt het u zoo voor, dat de hoeken gelijk zijn?

K. (Hier wordt het bovenſtaande bewijs gegeven.)

O. Wanneer wij de zaak nu omkeeren, en vooronderſtellen, dat de hoeken van den driehoek gelijk zijn, en het dus eenen gelijkhoekigen driehoek is, wat zegt gij dan van de zijden?

K. Dat de zijden gelijk zijn.

O. Kunt gij dat bewijzen?

K. (Hier wordt het tweede bewijs gegeven.)

O. Goed. Wanneer ik nu verder de twee opſtaande zijden van eenen gelijkzijdigen driehoek gelijkelijk verleng, en dan op nieuw eene bazis trek, verkrijg ik dan eene andere ſoort van driehoek? (De onderwijzer ſtelt het intusſchen op het bord voor.)

K. Neen, dan bekomt men weder eenen gelijkzijdigen driehoek.

O. Waarom?

K. De bovenſte hoek was $\frac{1}{3}$ van 2 ∟ en is dit gebleven, en dus de ſom der beide anderen $\frac{2}{3}$ van 2 ∟, en daar zij gelijk zijn gebleven, zoo

is

is ieder gelijk $\frac{1}{3}$ van 2 ∟, en dus zoo groot als de tophoek.

O. Wat kunnen wij dan ten opzigte van de grootte van den tophoek eenes gelijkbeenigen driehoeks zeggen?

K. Dat die grooter of kleiner moet wezen, dan een hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek.

O. En wat vloeit daaruit voort ten opzigte van de hoeken aan de bazis?

K. Dat die ook grooter of kleiner moeten zijn, dan iedere hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek.

O. Wanneer de tophoek kleinder is, dan die van eenen gelijkzijdigen driehoek, hoe is het dan met de hoeken aan de bazis?

K. Dan moeten de hoeken aan de bazis ieder grooter zijn, dan iedere hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek.

O. En wanneer de tophoek grooter is?

K. Dan zijn de hoeken aan de bazis ieder kleiner, dan iedere hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek.

O. Wat vloeit hieruit voort ten opzigte van de zijden? —— Wanneer b. v. de tophoek kleinder wordt genomen, dan de hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek; maar de beide opſtaande zijden worden dezelfde gelaten, hoe zal het dan met de derde zijde zijn?

K. Die zal kleiner worden.

O. Hoe zoudt gij dat bewijzen?

K. Omdat de lijn, die den hoek op gelijken af-

afſtand onderſpant, kleiner is, als de hoek kleiner genomen wordt.

O. Maar wanneer de hoek aan den top grooter genomen wordt, dan die van eenen gelijkzijdigen driehoek?

K. Dan zal de bazis grooter dan ieder van de opſtaande zijn.

(*Bewijs.*)

O. En hoe is het eindelijk met de hoeken aan de bazis van eenen gelijkbeenigen driehoek?

K. Die zijn aan elkander gelijk.

(*Bewijs.*)

O. Welke algemeene waarheden kunt gij uit hetgene wij tot hiertoe behandeld hebben, ten aanzien van gelijkzijdige en gelijkbeenige driehoeken opgeven?

K. 1. Van eenen gelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken aan elkander gelijk.

2. Van eenen gelijkhoekigen driehoek zijn de zijden gelijk.

3. Van eenen gelijkbeenigen driehoek zijn de hoeken aan de bazis gelijk.

4. Van eenen gelijkbeenigen driehoek is de tophoek grooter of kleiner, dan van eenen gelijkzijdigen driehoek.

5. Wanneer de tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek grooter is, dan een hoek van eenen gelijk-

lijkzijdigen driehoek, dan zijn de hoeken aan de bazis kleinder.

6. Wanneer de tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek kleinder is, dan een hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek, dan zijn de hoeken aan de bazis grooter.

7. Wanneer de tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek kleinder, dan een hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek is, dan is de bazis kleinder dan ieder der opſtaande zijden; en omgekeerd.

8. Wanneer de tophoek van eenen gelijkbeenigen driehoek grooter, dan een hoek van eenen gelijkzijdigen driehoek is, dan is de bazis grooter, dan een der opſtaande zijden; en omgekeerd.

Omtrent de 7de en 8ſte ſtelling laten wij hier een paar regtſtreekſche bewijzen volgen.

(Zie fig. 68a.)

Verleng *ab* tot $ad = ac$ is.

Dan is $\angle acb < \angle acd$

$\angle acd = \angle adc$

Dus $\angle acb < \angle adc$

$\angle adc < \angle abc$

Derh. $\angle acb < \angle abc$

(Zie

(Zie fig. 68, *b*.)

Wanneer de bazis ab grooter is dan een der opstaande zijden, verleng dan bc tot dezelve gelijk is aan ab, of maak $bd = bc$

Dan is $\angle acb > \angle dcb$
$\angle dcb = \angle bdc$

Dus $\angle acb > \angle bdc$
$\angle bdc > \angle dac$

Derh. $\angle acb >$ $\angle dac$ of $\angle bac$

---

ongelijkzijdige driehoek.

Van eenen ongelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken ongelijk, dat is de eene hoek zal grooter dan de andere zijn.

(Zie fig. 69.)

Bewijs. Laat bc grooter dan ac zijn, en maak $cd = ac$.

dan is $\angle dac = \angle adc$
$\angle adc > \angle abc$

Dus $\angle dac = \angle bac > \angle abc$

Van

Van eenen ongelijkzijdigen driehoek ſtaat de grootſte hoek tegen over de grootſte zijde.

(Zie fig. 70.)

Bewijs. Laat *ab* de grootſte zijde zijn, dan moet ∠ *c* > ∠ *a* of ∠ *b* zijn. Om het eerſte te bewijzen verlengt men *ac* en maakt *bd* = *ab*.

dan is ∠ *bac* = ∠ *bdc*
∠ *bdc* < ∠ *acb*

Derh. ∠ *bac* < ∠ *acb*

Om het tweede te bewijzen verlengt men *bc* en maakt *ae* = *ab*

dan is ∠ *abc* = ∠ *aeb*
∠ *aeb* < ∠ *acb*

Derh. ∠ *abc* < ∠ *acb*

En daarom ∠ *acb* de grootſte der drie hoeken.

Uit dit en het voorgaande bewijs volgt, dat van eenen ongelijkzijdigen driehoek de grootſte hoek tegenover de grootſte zijde, de tweede hoek tegen over de tweede zijde en de kleinſte hoek tegen over de kleinſte zijde ſtaat.

Een

Een driehoek, met drie ongelijke hoeken, heeft ook drie ongelijke zijden; dat is de eene zijde zal grooter zijn, dan ieder der twee anderen; de tweede zijde zal grooter zijn dan de derde, maar kleiner dan de eerſte, en de derde zal kleiner zijn, dan ieder der twee anderen.

Bewijs. Hoe grooter een hoek in eenen driehoek is, hoe grooter de tegenoverſtaande zijde zal zijn, die hem onderſpant. Integendeel, hoe kleinder de hoek is, hoe kleinder de tegenoverſtaande zijde zal zijn. Waaruit volgt: dat de lengte der tegenoverſtaande zijde van de grootte van den hoek afhangt. Houdt eindelijk de hoek ten laatſte op hoek te zijn, wegens zijne kleinheid, dan houdt ook de tegenoverſtaande zijde op zijde te zijn.

Houdt integendeel de hoek op hoek te zijn wegens zijne grootte, en maken dus de beide beenen eene regte lijn, dan houdt de tegenoverſtaande ook op zijde te zijn, naardien zij op de regte lijn valt, die de beide beenen uitmaken. Hieruit volgt: hoe grooter een hoek is, des te grooter is ook de tegenoverſtaande zijde.

Hoe kleiner de hoek is, hoe kleiner de tegenoverſtaande zijde zal zijn. Dus

Hoe grooter het onderſcheid tusſchen twee hoeken in eenen driehoek is, hoe grooter ook het onderſcheid tusſchen de tegenoverſtaande zijden zal zijn, en omgekeerd.

Hoe kleinder het verſchil der hoeken, hoe kleinder het verſchil der tegenoverſtaande zijden.

Bij gevolg, wanneer er geen onderſcheid tusſchen de hoeken is, dan heeft het ook tusſchen de zijden geen plaats. Wanneer dus een driehoek drie gelijke hoeken heeft, zoo heeft hij ook drie gelijke zijden.

Heeft men dus in eenen driehoek twee gelijke hoeken, dan heeft die driehoek ook twee gelijke zijden. Aldus kan men verder voort redeneren.

Twee zijden van eenen driehoek te zamen genomen, zijn altijd grooter dan de derde alleen.

(Zie fig. 71.)

Bewijs. Laat *ad perpendiculair* op *bc* zijn, dan is in den driehoek *abd*, $\angle\ bda > \angle\ bad$, dus $ab > bd$. En om dezelfde reden is in den $\Delta\ adc$, $\angle\ adc > \angle\ dac$, daarom $ac > dc$. Derh. $ab + ac > bd + dc$ of $ab + ac > bc$.

Aanmerking. Even als men tot hiertoe de zijden en hoeken der driehoeken heeft leeren bepalen, zou men kunnen voortgaan ook in opzigt tot vier-, vijf- en zeshoeken; maar alzoo in die figuren de hoeken niet door de zijden, noch de zijden door de hoeken be-

paald worden, naardien zij niet regtstreeks van elkander afhangen, zoo doet men beter dit tot de deeling der figuren uit te stellen; wanneer men gelegenheid vindt alle vier-, vijf-, zeshoeken, enz. in driehoeken te verdeelen. Het is daarom, dat wij overgaan tot de tweede afdeeling.

TWEEDE AFDEELING.

OVER DE GELIJKHEID OF OVEREENKOMST DER FIGUREN IN DERZELVER GEHEEL.

§. 9.

De overeenkomst of gelijkheid der driehoeken.

Voor dat de onderwijzer overgaat, om dit onderwerp te behandelen, behoort hij met zijne leerlingen te spreken over de gelijkheid der dingen in het algemeen, en wel zoo als die uit de overeenkomst afgeleid wordt, ten einde daaruit deze elfde *axioma* te doen ontstaan:

De dingen, die met elkander overeenkomen, zijn aan elkander gelijk, en van gelijke regte lijnen en hoeken passen de uiteinden op elkander.

Heeft

Heeft hij dit het kind op de regte wijze aangebragt, dan gaat hij over tot de vergelijking van twee driehoeken.

Twee driehoeken hebben te zamen zes zijden. Van deze zijn:

1e. Alle zes de zijden gelijk.
2e. Vijf gelijk en een ongelijk.
3e. Vier gelijk en twee gelijk.
4e. Vier gelijk en twee ongelijk.
5e. Drie en drie gelijk.
6e. Twee, twee en twee gelijk.

Wanneer twee driehoeken 6 gelijke zijden hebben, dan zijn zij gelijkzijdig.

Hebben zij 5 gelijke en 1 ongelijke zijde, dan is de eene driehoek gelijkzijdig en de andere gelijkbeenig. De gelijkbeenige kan regt-, ſcherp- en ſtomphoekig zijn.

Wanneer twee driehoeken, 4 gelijke en 2 gelijke zijden hebben, dan is de eene driehoek gelijkzijdig en de andere gelijkbeenig. De gelijkbeenige kan zijn regt-, ſcherp- of ſtomphoekig. Of zij zijn beide gelijkbeenig, enz.

Wanneer twee driehoeken 4 gelijke en 2 ongelijke zijden hebben, dan is de eene gelijkzijdig en de andere ongelijkzijdig; of beide zijn gelijkbeenig, enz.

Hebben zij 3 en 3 gelijke zijden, dan zijn zij beide gelijkzijdig, enz.

Hebben zij 3 maal 2 gelijke zijden, dan zijn het twee ongelijkzijdige driehoeken, enz.

Het ſpreekt van zelf, dat in deze afdeeling niet enkel van de gelijkheid der figuren, maar ook van de overeenkomst der zijden en hoeken gehandeld wordt, naardien de beide laatſte door de eerſte en de eerſte door de beide laatſte bepaald worden.

Aanmerking. De onderwijzer vraagt den leerling: hoe moeten twee driehoeken geſteld zijn, wanneer ieder zal zeggen dat zij even groot zijn?

De een zal zeggen 6 gelijke hoeken; een ander 6 gelijke zijden; een derde 6 gelijke hoeken en 6 gelijke zijden, enz.

Op het noemen van 6 gelijke hoeken, zegt de onderwijzer: gelooft gij, dat wanneer twee driehoeken 6 gelijke hoeken hebben, de twee driehoeken aan elkander gelijk zijn? Antwoord: ja of neen. Hij, die neen zegt, wordt aangeſpoord om twee driehoeken te maken, die wel 6 gelijke hoeken hebben, maar niet even groot zijn. Dengenen, die zegt: dat 6 gelijke hoeken en 6 gelijke zijden gevormd worden, wordt gevraagd, of de driehoeken, wanneer zij 6 gelijke zijden hebben, ook noodzakelijk geen 6 gelijke hoeken moeten hebben.

O. Beproeft eens of gij mij kunt bewijzen, dat wanneer twee driehoeken 6 gelijke zijden hebben, zij werkelijk aan elkander gelijk zijn.

Een

Een of meerder leerlingen vinden zeker eenen weg, om dit te bewijzen, althans wanneer men hen niet te ſpoedig heeft voortgezet.

Op deze of dergelijke wijze gaat de onderwijzer met zijne leerlingen te werk, tot zij alle gevallen zelven opgedolven en bewezen hebben.

Dat men niet aan de volgende bewijzen gebonden is, maar de kinderen alle vrijheid laat, behoeft niet herinnerd te worden.

Wanneer twee driehoeken gelijke hoeken en zijden hebben, dan zijn zij even groot.

Dit kan zonder bewijs als waarheid aangenomen worden; of daar de vorm der vlakken van hoeken en zijden afhangt, zoo kan men zeggen, dat zulke driehoeken noodzakelijk op elkander moeten paſſen, en dus volgens *axioma* 11 gelijk van *grootte* of *inhoud* zijn. Ook zijn deze gelijkvormig.

Zijn driehoeken gelijk van inhoud, maar niet van vorm, dan worden zij even groot, maar ongelijkvormig genoemd.

Wanneer van twee gelijkzijdige driehoeken eene zijde van den eenen gelijk is aan eene zijde van den anderen, dan zijn beide de driehoeken in alle opzigten gelijk.

Bewijs. Wanneer eene zijde van den eenen gelijk is aan eene zijde van den anderen, dan zijn de drie zijden van den eenen gelijk aan de drie zijden van den anderen, omdat het beide gelijkzijdige driehoeken zijn. Daar zij nu in opzigt tot

zijden en hoeken gelijk zijn, zoo zijn zijook gelijk in *grootte*, en zelfs gelijkvormig.

Gevolg. Wanneer van eenen gelijkzijdigen driehoek eene zijde grooter is, dan eene zijde van eenen anderen gelijkzijdigen driehoek, zoo is de eerfte grooter dan de tweede.

Dit kan men als een gevolg aanzien, dat van zelf duidelijk is, maar meent men dit bepaald te moeten bewijzen, dan kan men ook dus te werk gaan:

Men befchrijft eenen gelijkzijdigen driehoek *adb* (fig. 72.) en trekt *fg* parallel aan *bd*. Daardoor ontftaat ook een gelijkzijdige driehoek *afg*, van welken de zijde *af* korter is dan *ab*, dus de andere zijden ook korter. Zoo lang dus de zijde *af* van den gelijkzijdigen driehoek *afg* korter is dan *ab*, zoo lang zijn het de anderen ook, en zoo lang blijft dus de △ *afg* flechts een deel van den △ *adb*.

Wanneer twee driehoeken vier gelijke zijden hebben (in beide gelijk verdeeld) *en tusfchen deze vier gelijke zijden twee gelijke hoeken, dan zijn zij gelijkvormig en de twee overige zijden aan elkander gelijk, — ook zijn de driehoeken even groot.*

(Zie fig. 72.)

Bewijs. Men maakt eenen gelijkbeenigen driehoek en trekt parallel aan de bazis eene lijn. Dan is ∠ *fag* = ∠ *bad*, en *af* = *ag*, omdat ∠ *afg* = ∠ *agf* = ∠ *abd* = ∠ *adb* is, maar

af

af en *ag* zijn ſlechts deelen van *ab* en *ad*. Zoo ook is de $\triangle$ *afg* maar een deel van den $\triangle$ *abd*, en zal dit zoo lang blijven tot dat *fg* gelijkloopend zoo veel naar beneden gebragt wordt, tot zij op *bd* ligt; dan is de eerſte geen deel meer van den laatſten, maar zij zijn in alle opzigten aan elkander gelijk; daardoor is dan $fg = bd$ en de $\triangle afg = \triangle abd$ geworden.

Men kan hieruit afleiden, dat wanneer $af < al$ is, de eerſte driehoek kleinder dan de laatſte zal zijn, en dat wanneer $af > ab$ wordt, de eerſte grooter dan de laatſte zal wezen.



Wanneer een driehoek twee ongelijke zijden heeft, die ieder in het bijzonder gelijk zijn aan twee zijden van eenen anderen driehoek, en de hoek, dien de beide eerſte lijnen bevatten gelijk is aan den hoek, door de beide laatſten bepaald; dan zal de derde zijde van den eenen gelijk zijn aan de derde zijde van den anderen, ook zullen de hoeken, die tegen over gelijke zijden ſtaan even groot zijn, en de driehoeken zelven gelijk aan elkander.

(Zie fig. 73.)

Bewijs. Men kan twee driehoeken nevens elkander op het bord ſtellen, van welke b. v. $ab = dc$, $ac = df$ en $\angle cab = \angle fde$ gegeven wordt, en verder aldus redeneren.

Vooronderstellen wij dat de Δ *def* kon geschoven worden op den Δ *abc*, en dat men dan het punt *e* op het punt *b* plaatste en *de* op *ab* lag, dan moest het punt *d* op *a* en *df* op *ac* komen; ook zou het punt *f* op *c* vallen, alles volgens *ax*. 11.

Om dat hierdoor de uiteinden *e* en *f* van de lijn *ef* zouden overeenkomen met de uiteinden *b* en *c* van de lijn *bc*, zoo is *ef* = *bc*. *ax*. 11.

Omdat, door de bovenstaande bewerking, de lijnen *df* en *fe* en dus de uiteinden van den ∠ *dfe* overeenkomen met *ac* en *bc*, de uiteinden van den ∠ *acb*, zoo is ∠ *acb* = ∠ *dfe*. *ax*. 11.

Om gelijke reden is ∠ *abc* = ∠ *def*.

Eindelijk, omdat al de uiteinden van den Δ *abc* overeenkomen met al de uiteinden van den Δ *def*, zoo is Δ *abc* = Δ *def*. *ax*. 11.

Wanneer van twee regthoekige driehoeken de schuinsche zijde van den eenen gelijk is aan die van den anderen, als ook eene der regthoekszijden van den eenen aan die van den anderen, dan zijn de beide driehoeken aan elkander gelijk, zoo in opzigt tot zijden, hoeken, als inhoud.

Het bewijs hiervoor is ligt te vinden.

Wanneer twee driehoeken twee gelijke zijden, en op deze vier gelijke hoeken hebben, dan zijn de vier ove-

overige zijden gelijk en de beide driehoeken even groot.

(Zie fig. 73.)

Bewijs. Men kan twee driehoeken opſchrijven, in dezelve $ab = de$ en $\angle a = \angle b = \angle d = \angle e$ opgeven en verder aldus redeneren:

Laat de $\triangle$ *abc* worden opgeligt en gevoegd op den $\triangle$ *def* zoodanig, dat het punt *a* op *d* en *ab* op *de* ligt, dan moet *b* op *e* komen; ook moet *ac* op *df* en *bc* op *ef* vallen, volg. *ax.* 11. Dus komt het punt *c* op *f* en de beide driehoeken komen geheel met elkander overeen. Dus $ac = df = bc = ef$ en $\angle acb = \angle dfe$.

Wanneer twee driehoeken twee gelijke zijden hebben, en op deze twee paar gelijke hoeken (de twee van ieder paar op zich zelf, aan elkander gelijk) dan zullen ook de overige zijden, die over gelijke hoeken ſtaan, en de driehoeken zelven aan elkander gelijk zijn.

(Zie fig. 73.)

Bewijs. Wanneer $ab = de$, $\angle a = \angle d$ en $\angle b = \angle e$ genomen wordt, dan is het bewijs als boven.

Zoo twee driehoeken vier en twee gelijke zijden hebben zijn zij aan elkander gelijk.

Dit valt ligt te bewijzen.

Wanneer twee driehoeken drie paar gelijke zijden hebben, (de twee van ieder paar op zich zelf aan elkander gelijk) dan zijn de hoeken, die tegen over gelijke zijden ſtaan aan elkander gelijk, alsmede de beide driehoeken zelven.

(Zie fig. 74 en 75.)

Bewijs. In dit geval kunnen de driehoeken ſcherphoekig en ſtomphoekig zijn. Wanneer zij ſcherphoekig zijn, dan is in fig. 74 de $\triangle$ *abd* gelegd tegen den $\triangle$ *abc*, zoodanig dat *ab* op *ab*, en het punt *a* in *a* en *b* in *b* ligt. Ook trekt men de lijn *cd*. Hierdoor zijn *adc* en *dbc* gelijkbeenige driehoeken en dus

$$\angle\, acd = \angle\, adc$$
$$\angle\, bcd = \angle\, bdc$$
$$\overline{\hspace{10em}}\text{opget.}$$
$$\text{Derh. } \angle\, acb = \angle\, adb$$

Hierdoor verandert het geval in een der voorgaande, waarin alles verder bewezen is, waardoor men zeggen kan:

Dus

Dus $\angle\ cab = \angle\ dab$
$\angle\ abc = \angle\ abd$
en $\triangle\ abc = \triangle\ abd$.

Indien de driehoeken ſtomphoekig zijn, dan heeft men in fig. 75.

$\angle\ acd = \angle\ adc$
$\angle\ bcd = \angle\ bdc$
——————— afget.
Derh. $\angle\ acb = \angle\ adb$
En verder als hier voor.

Uit deze en voorgaande bewijzen blijkt (maar hoe?) dat wanneer drie termen van eenen driehoek, welke die ook zijn (uitgezonderd drie hoeken) ieder in het bijzonder aan drie termen van eenen anderen driehoek gelijk zijn, de beide driehoeken in alle opzigten even groot zijn. En dat derhalve ook, *als de bazis en een hoek op dezelve, benevens de zijde tegen over denzelven van den eenen driehoek gelijk is aan hetzelfde in eenen anderen driehoek, dan zijn de driehoeken gelijk.*

Aanmerking. Men heeft nog meerdere eigenſchappen van driehoeken, maar die zijn of te moeijelijk hier te bewijzen, of zij komen in het vervolg en beter voor. Vindt evenwel een onderwijzer, dat hij bij deze meer eenvoudi-

dige eigenschappen nog anderen kan voegen, dan doet hij zulks en handelt naar verkiezing.

Zoo als hier de eigenschappen, betreffende de overeenkomst van twee driehoeken, zijn opgegeven, zoo kan de onderwijzer met zijne leerlingen voortgaan, en de eigenschappen en overeenkomsten van vier-, vijf- en zeshoeken trachten op te sporen. Evenwel moet men tot nog toe niet diep in dezelve trachten in te dringen, naardien men spoedig te hoog voor het kind wordt; offchoon men deze eigenschap niet moet overslaan: *dat regthoeken of parallelogrammen, die op dezelfde of gelijke bazis en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staan gelijk zijn.*

HERHALING.

17. Van eenen gelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken aan elkander gelijk.

18. Wanneer van eenen driehoek de hoeken gelijk zijn, dan zijn ook de zijden gelijk.

19. Van eenen gelijkbeenigen driehoek, zijn de hoeken aan de bazis gelijk.

20. Wanneer van eenen driehoek de hoeken aan de bazis gelijk zijn, dan is het een gelijkbeenige driehoek.

21. Van eenen ongelijkzijdigen driehoek zijn de hoeken ongelijk.

22. Van eenen ongelijkzijdigen driehoek ſtaat de grootſte hoek tegen over de grootſte zijde.

23. Een driehoek met drie ongelijke hoeken heeft drie ongelijke zijden.

24. Twee zijden van eenen driehoek zijn te zamen genomen, altijd grooter, dan de derde alleen.

25. Wanneer twee driehoeken gelijke hoeken en zijden hebben, dan zijn zij even groot.

26. Wanneer van twee gelijkzijdige driehoeken, eene zijde van den eenen gelijk is aan eene zijde van den anderen, dan zijn beide de driehoeken in alle opzigten gelijk.

27. Wanneer twee driehoeken vier gelijke zijden hebben (in beide gelijk verdeeld) en tusſchen deze vier gelijke zijden twee gelijke hoeken, dan zijn zij van gelijken vorm, en de twee overige zijden aan elkander gelijk; — ook zijn de driehoeken even groot.

28. Wanneer een driehoek twee ongelijke zijden heeft, die ieder in het bijzonder gelijk zijn aan twee zijden van eenen anderen driehoek en de hoek, dien de beide eerſte lijnen bevatten, gelijk is aan den hoek, door de beide laatſte bepaald; dan zal de derde lijn van den eenen driehoek gelijk zijn aan de derde van den anderen, ook zullen de hoeken, die tegen over gelijke zijden ſtaan, aan elkander gelijk, en de driehoeken even groot zijn.

29. Wanneer twee driehoeken twee gelijke zijden

den, en op deze vier gelijke hoeken hebben, dan zijn de vier overige zijden gelijk en de beide driehoeken even groot.

30. Wanneer twee driehoeken twee gelijke zijden hebben, en op deze twee paar gelijke hoeken, dan zullen de overige zijden, die over gelijke hoeken ſtaan, benevens de driehoeken zelven aan elkander gelijk zijn.

31. Zoo twee driehoeken vier en twee gelijke zijden hebben, dan zijn zij aan elkander gelijk.

32. Wanneer twee driehoeken drie paar gelijke zijden hebben, dan zijn de hoeken, die tegen over gelijke zijden ſtaan aan elkander gelijk en de beide driehoeken even groot.

33. Als de bazis en een hoek op dezelve, benevens de zijde tegen over dien hoek van den eenen driehoek gelijk is aan hetzelfde in eenen anderen driehoek, dan zijn de driehoeken gelijk.

Aanmerking. Men kan deze grondſtellingen door de kinderen bij herhaling laten opgeven, of wederom op nieuw bewijzen; althans het is hoog noodzakelijk, dat zij onvergetelijk worden ingedrukt.

DERDE AFDEELING.

OVER DE DEELING VAN FIGUREN, ALS VOORTZETTING EN TOEPASSING DER BEIDE VOORGAANDE AFDEELINGEN.

§. 10.

Deeling der driehoeken.

Door lijnen te trekken uit de hoeken.

Uit een hoek.

Wanneer van eenen gelijkzijdigen of gelijkbeenigen driehoek de tophoek midden door gedeeld wordt, dan deelt die lijn de bazis en den driehoek in twee gelijke deelen.

(Zie fig. 76.)

Bewijs. Laat *cd* den tophoek midden door deelen, dan is

$$\angle\, acd = \angle\, bcd$$
$$ac = bc$$
$$cd = cd$$

$$\text{Derh.}\quad ad = bd$$
$$\text{en}\quad \Delta\, adc = \Delta\, bcd$$

Hier-

Hieruit volgt ook dat *cd* perp. op *ab* ſtaat.

Ook volgt hieruit, dat wanneer men een der hoeken aan de bazis van eenen gelijkzijdigen driehoek midden door deelt, de deellijn ook den driehoek zoowel als de tegen overſtaande zijde in twee gelijke deelen zal verdeelen.

Aanmerking. De onderwijzer zal wel doen, wanneer hij de kinderen ook het omgekeerde laat bewijzen, en er ook deze waarheid uit doet afleiden: wanneer van twee regthoekige driehoeken de hepotenuſe, alsmede de eene regthoekszijde van den eenen driehoek gelijk is aan hetzelfde in den anderen; dat dan die driehoeken in alle opzigten aan elkander gelijk zijn.

Wanneer men van eenen gelijkbeenigen driehoek eenen hoek aan de bazis, door eene regte lijn, midden door deelt, dan wordt door deze lijn de tegenoverſtaande zijde in twee ongelijke deelen gedeeld, alsmede ook de driehoek.

(Zie fig. 77, 78 en 79.)

Bewijs. Naardien een gelijkbeenige driehoek regt-, ſcherp- en ſtomphoekig kan zijn, zoo volgen hier drie bewijzen.

Als

Als de driehoek regthoekig is. Fig. 77.

Trek *de* perpendiculair op *ab* of maak ∠ *bde* = ∠ *adc*.

Dan is △ *adc* = △ *ade*
△ *abd* > △ *ade*

Derh. △ *abd* > △ *acd*

Ook is *cd* = *de*
bd > *de*

Derh. *bd* > *cd*

Aanmerking. Alle verkorte bewijzen worden door de kinderen volledig uitgewerkt.

Wanneer de driehoek scherphoekig is. Fig. 78.

Maak ∠ *ade* = ∠ *adb*.

Dan is △ *adb* = △ *ade*
△ *adc* > △ *ade*

Derh. △ *adc* > △ *adb*

∠ *adb* > ∠ *acd*
∠ *adb* = ∠ *ade*

Dus ∠ *ade* > ∠ *acd*
Maar ∠ *dec* > ∠ *ade*

Daarom ∠ *dec* > ∠ *acd* of ∠ *ecd*
Dus *cd* > *de*
de = *bd*

Derh. *cd* > *bd*.

Aanmerking. Men ziet uit deze figuur, dat hoe meer de zijde *ac* met *ab* overeenkomt, hoe meer de figuur den gelijkzijdigen driehoek nadert, en dus het bovendeel van den driehoek het grootste stuk blijft, en ook van de tegenoverstaande zijde het bovendeel het grootste is, zoo lang de tophoek minder dan 60° is; dat de deelen gelijk zijn, wanneer de tophoek 60° is, en dat de bovendeelen kleinder worden zoodra de tophoek meer dan 60° bevat; hetwelk ook het geval is bij den stomphoekigen gelijkbeenigen driehoek, welke volgt.

Indien de driehoek stomphoekig is. Fig. 79.

Maak *ae* = *ac* en trek *de*.

Dan is $\triangle\ adc = \triangle\ ade$

$\triangle\ adb > \triangle\ ade$

Derh. $\triangle\ adb > \triangle\ adc$

Ook is $\angle\ deb > \angle\ ade$

$\angle\ ade = \angle\ adc$

Dus $\angle\ deb > \angle\ adc$

$\angle\ adc > ebd$

Dus $\angle\ deb > \angle\ ebd$

Daarom $bd > de$

$de = cd$

Derh. $bd > cd$.

Aan-

Aanmerking. De onderwijzer moet zich nimmer bepalen tot eene wijze van oplosſen, maar den geest des kinds vrijen gang laten; en wanneer hij ziet dat de redenering des kinds eenen anderen loop neemt, dan moet hij dien helpen volgen, gepast trachten te leiden en brengen tot het ware doel.

Een enkelde proef hoe de dingen zich van verſchillende kanten laten aanvatten, zal genoeg zijn.

Om in den regthoekigen driehoek abc *te bewijzen, dat* dc > bd *is.* Fig. 80.

Bewijs. Verleng *ab* tot deze gelijk is aan *ac*, dan is *aec* een gelijkbeenige driehoek. Verleng dan *ad* tot in *f*, dan deelt dit punt de bazis *ec* in twee gelijke deelen, en hier door is *ed* = *dc*

maar *ed* > *bd*

Derh. *cd* > *bd*

Of, Fig. 81.

Maak in den △ *abc* den gelijkb. △ *abe*. Dan is *bd* = *de*, maar *dc* > *de*, derh. *dc* > *bd*.

Van eenen ongelijkzijdigen regthoekigen driehoek den regten hoek midden door gedeeld hebbende, zal

 de

de tegenoverſtaande zijde, alsmede de driehoek zelf in twee ongelijke deelen gedeeld zijn.

Ook is dit waar bij het doordeelen van de twee andere hoeken.

(Zie fig. 82.)

Bewijs. Laat *be* = *ab* genomen en *de* getrokken worden.

Dan is $\triangle$ *abd* = $\triangle$ *bde* en dus $\triangle$ *bcd* > $\triangle$ *abd*.
Ook is *de* = *ad*.

Maar $\angle$ *dec* > $\angle$ *bde*
$\angle$ *bde* = $\angle$ *adb*

Dus $\angle$ *dec* > $\angle$ *adb*
$\angle$ *adb* > $\angle$ *bcd*.

Daarom $\angle$ *dec* > $\angle$ *bcd*
Derh. $\angle$ *dc* > *de* of *ad*.

De bewijzen voor de ongelijkheid der deelen, wanneer de deellijn uit een der ſcherpe hoeken getrokken is, komen geheel op hetzelfde neder en zullen door den onderwijzer wel gevonden worden.

Van eenen ongelijkzijdigen ſcherphoekigen driehoek een der hoeken in twee gelijke deelen gedeeld zijnde, zal de tegenoverſtaande zijde, alsmede de drie-

driehoek zelf in twee ongelijke deelen gedeeld worden.

Het bewijs is genoegzaam uit het voorgaande af te leiden.

Van eenen ongelijkzijdigen ſtomphoekigen driehoek een der hoeken in twee gelijke deelen gedeeld zijnde, zal de tegenoverſtaande zijde, alsmede de driehoek zelf in ongelijke deelen gedeeld zijn.

Het bewijs is uit het voorgaande af te leiden.

Aanmerking. Wij laten de voortzetting en uitbreiding van dit onderwerp aan den onderwijzer over, en vergenoegen ons met eene korte aanwijzing.

1. De voorgaande behandelde driehoeken kunnen nader bepaald worden, b. v. *Wanneer in eenen regthoekigen driehoek, wiens ſcherpe hoek op de bazis* = $\frac{2}{3}$ ∟ *is, eene lijn uit den regten hoek getrokken wordt, die denzelven zoodanig deelt, dat de deelen tot elkander ſtaan als* 2 : 1; *dan wordt de hepotenuſe in twee gelijke deelen, en de driehoek in een gelijkbeenigen en gelijkzijdigen driehoek verdeeld.*

2. Verder kan men de geheele zaak omkeeren, en uit eenen hoek eene lijn zoodanig trekken, dat zij de tegenoverſtaande zijde in twee gelijke deelen deelt, en dan doen bewijzen,

 dat

Als de twee gelijke hoeken van eenen gelijkbeenigen driehoek ieder in twee gelijke deelen gedeeld worden, te vinden wat daardoor aan elkander gelijk is.

(Zie fig. 84.)

Oplossing. △ *abd* is gelijk *den* △ *abe.*

Want ∠ *abd* = ∠ *bae*
∠ *bad* = ∠ *abe*
ab = *ab*

Derh. △ *abd* = △ *abe.*

De △ *afe* is gelijk den △ *bfd*
Want △ *abe* = △ *abd*
△ *abf* = △ *abf*

Derh. △ *afe* = △ *bfd.*

Verder is *ad* = *be*, *af* = *bf*, *ef* = *fd*, *ae* = *bd* en *ec* = *cd.*

Wanneer men de lijn *de* trekt, dan is *deze* evenwijdig met *ab.*

Aanmerking. Nu kan men den tophoek en eenen hoek aan de bazis midden door deelen, maar dan treft men niets aan dat gelijk is; ook zoo bij den ongelijkzijdigen driehoek, waarom men deze gewoonlijk voorbij gaat.

Hier kan men evenwel bijvoegen, het deelen van

van twee zijden eenes driehoeks in twee gelijke deelen; doch gevallen van belang worden hier niet aangetroffen. Wij gaan daarom over tot het trekken van deellijnen

Uit drie hoeken.

Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek ieder der hoeken midden door gedeeld wordt, te vinden hetgene gelijk is, en te bewijzen, dat de drie deellijnen elkander in één punt snijden.

(Zie fig. 85.)

Oplosing. Van 1e. Omdat
$ad = db = be = ec = cf = fa$ is
en $ag = bg = bg = cg = cg = ag$.
alsmede $\angle gad = \angle dbg = \angle ebg = \angle ecg = \angle fcg = \angle fag$.

Zoo is $\triangle agd = \triangle bgd = \triangle bge = \triangle egc = \triangle cgf = \triangle afg$.

Ook blijkt duidelijk, dat de hoeken om het punt *g* allen aan elkander gelijk zijn.

Bewijs van 2e. Laat de lijn *ef* getrokken worden, dan zijn *ecf* en *efg* gelijkbeenige driehoeken.
De lijnen *bf* en *ae* snijden elkander in *g*, en door dit punt moet ook *cd* gaan; want *ch* staat perpendiculair op *ef*, en deelt dezelve in twee gelijke deelen. Zoo ook staat *gh* regthoekig op *ef*, en deelt dezelve mede in 2 gelijke deelen; zoodat *ch* en *hg* in hetzelfde punt

 ko-

komen, en dus de eene het verlengde van de andere is; waaruit men gereedelijk besluit, dat het verlengde van *ch* en dus de lijn *cd* door het punt *g* gaat.

Wanneer men van eenen gelijkzijdigen driehoek twee hoeken midden doordeelt, door twee regte lijnen, welke elkander in een punt ontmoeten, en men voorts uit dit punt eene regte lijn naar den derden hoek trekt, dan wordt ook deze midden doorgedeeld.

(Zie fig. 86.)

Het bewijs hiervan is ligt op te maken.

Wanneer men van eenen gelijkbeenigen driehoek twee hoeken midden door deelt, door twee regte lijnen, welke elkander in een punt ontmoeten, en men voorts uit dit punt eene regte lijn naar den derden hoek trekt, dan wordt ook deze midden door gedeeld.

Het bewijs hiervan is uit het voorgaande duidelijk.

Wan-

Wanneer men van eenen ongelijkzijdigen driehoek de drie hoeken door drie regte lijnen midden door deelt, dan zullen deze elkander in een punt ontmoeten, en zoo men uit dit punt perpendiculairen op de zijden trekt, dan zullen deze gelijk zijn.

(Zie fig. 87.)

Deze ongelijkzijdige driehoek kan regthoekig, ſcherphoekig of ſtomphoekig zijn. Wij nemen hier eenen ſcherphoekigen driehoek.

Bewijs. Wanneer men hoek *a* en *b* midden door deelt, dan ontmoeten de deellijnen elkander in *d*. Dit moet ook plaats hebben, wanneer hoek *c* en *a* of *c* en *b* midden door gedeeld worden; want daar het doordeelen in beide gevallen door dezelfde lijn geſchiedt, zoo kan geen ander punt voor het deelen van den hoek *c* gevonden worden, dat tevens aan de deeling der hoeken *a* en *b* kan voldoen, dan het punt *d*.

Men kan dit ook anders bewijzen. Laat ∠ *a* en ∠ *b* midden door gedeeld zijn door de lijnen *ad* en *bd*; wanneer men dan *cd* trekt, dan zal deze den hoek *c* midden doordeelen.

Want	*dc* =	*dc*	
	de =	*df*,	zie hier onder.
	∠ *dec* =	∠ *dfc* = ∟	

Derh. ∠ *dce* = ∠ *dcf*.

Ver-

Verder is $ad = ad$
$\angle\ agd = \angle\ afd$
$\angle\ dag = \angle\ daf$

Derh. $dg = df$
Op gelijke wijze bewijst men
dat $dg = de$ is.

Dus $dg = df = de$.

Aanmerking. Het deelen der hoeken uit het midden der drie zijden, door lijnen naar de tegenoverſtaande hoeken, zal weinig belangrijks opleveren; evenwel kan de onderwijzer het beginnen en voortzetten, zoo verre hij het verkiest.

Alle belangrijke algemeene waarheden worden hier weder opgenoemd of herhaald en achtervolgens genommerd.

Door lijnen te trekken evenwijdig aan de zijden.

Aan eene zijde.

Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek, uit het midden eener zijde, evenwijdig aan eene tweede, eene lijn wordt getrokken, dan zal deze ook de andere in twee gelijke ſtukken deelen.

(Zie

(Zie fig. 88.)

Bewijs. Omdat *de* evenwijdig met *ab* is, zoo is $\angle\, cde = \angle\, cab = \angle\, abc = \angle\, dec$. Dus is de $\triangle\, cde$, ook een gelijkzijdige driehoek. Daarom $cd = ce = \frac{1}{2}\, ac = \frac{1}{2}\, bc$.

In eenen gelijkbeenigen driehoek de eene zijde door eene lijn evenwijdig aan de bazis in twee gelijke deelen gedeeld zijnde, zal ook de andere zijde daardoor in twee gelijke deelen gedeeld worden.

Het bewijs komt geheel met dat van den gelijkzijdigen driehoek overeen.

Wanneer de eene zijde van eenen ongelijkzijdigen driehoek door eene lijn, evenwijdig aan de bazis loopende, in twee gelijke deelen gedeeld wordt, dan zal daardoor tevens de andere zijde in twee gelijke deelen gedeeld worden.

(Zie fig 89.)

Bewijs. Trek *ef* evenwijdig aan *ad* en trek *ae*.

Dan is $ae = ae$

$\angle\, dae = \angle\, aef$

$\angle\, aed = \angle\, eaf$

Daar-

Daarom $ad = ef$
$ad = dc$

$ef = cd$
$\angle feb = \angle dce$
$\angle efb = \angle cde = \angle bac.$

Derh. $be = ce.$

Hieruit volgt, dat de deellijn, in al de voorgaande gevallen, de helft van de lijn uitmaakt, waarmede zij evenwijdig is.

Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek, evenwijdig aan een der zijden en op de helft der andere zijden eene lijn wordt getrokken, zal deze den driehoek in ongelijke deelen verdeelen, doch zoo, dat het eene een derde van het andere is.

(Zie fig. 88.)

Bewijs. Trek ef evenwijdig met ac, en trek df.

Dan is $be = ce$
$\angle fbe = \angle dec$
$\angle feb = \angle dce$

Daarom $\triangle bef = \triangle dce.$

Ook is $ef = ef$
$de = fb$
$\angle def = \angle efb$

Dus $\triangle def = \triangle bef.$

Ver-

Verder is $\angle\, daf = \angle\, cde$
$ad = cd$
$af = de$

Derh. $\triangle\, afd = \triangle\, cde = \triangle\, bef = \triangle\, def.$
en dus $\triangle\, cde = \frac{1}{3}$ van *abcd.*
of $\triangle\, cde = \frac{1}{4}\, \triangle\, abc.$

Ook kan men laten bewijzen dat *df* evenwijdig met *eb* moet zijn.

Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek eene lijn op $\frac{1}{3}$ van de zijde, evenwijdig aan de bazis, wordt getrokken, dan zal die de andere zijde ook op $\frac{1}{3}$ der lengte ſnijden. Ook zal de afgeſnedene driehoek $\frac{1}{9}$ van den geheelen driehoek zijn.

(Zie fig. 90.)

Bewijs. Trek *fg* op $\frac{1}{3}$ van *ac* evenwijdig aan *ab*, en *fh* en *di* evenwijdig aan *bc*; trek verder *eh* en *gi*, dan zijn de $\triangle$ *afh*, *fhk*, *fkd*, enz. gelijkhoekig aan $\triangle$ *dec* en aan den geheelen $\triangle$ *abc*, dus alle gelijkzijdige driehoeken, en allen aan elkander gelijk. Dus $ce = \frac{1}{3}\, bc$ en $\triangle\, cde = \frac{1}{9}\, \triangle\, abc.$

Hieruit volgt, dat wanneer men den driehoek door twee evenwijdige lijnen aan de bazis, ieder op

op $\frac{1}{3}$ van de zijde getrokken, verdeelt, het kleinste stuk $\frac{1}{3}$ van het middelste, $\frac{1}{5}$ van het grootste en $\frac{1}{9}$ van het geheel zal zijn.

Deelt men den driehoek door drie zoodanige lijnen, die ieder op $\frac{1}{4}$ getrokken worden, in 4 deelen, dan zal het kleinste deel $\frac{1}{3}$ van het tweede, $\frac{1}{5}$ van het derde, $\frac{1}{7}$ van het vierde en $\frac{1}{16}$ van het geheel zijn.

Wanneer men de opstaande zijden van eenen gelijkzijdigen driehoek verlengt, en tusschen deze verlengselen eenen lijn trekt evenwijdig en gelijk aan de bazis, dan zal daardoor een driehoek gevormd worden, die gelijk is aan den eersten.

(Zie fig. 91.)

Bewijs. De lijn $de = ab$

$\angle cde = \angle abc$

$\angle ced = \angle bac$

Derh. $\triangle cde = \triangle abc.$

Op gelijke wijze wordt dit bij eenen gelijkbeenigen driehoek bewezen.

Wanneer de lijn de $= \frac{1}{3}$ ab *en evenwijdig is, dan zal de laatste driehoek gelijk een vierde van den eersten zijn.*

(Zie

(Zie fig. 92.)

Dit wordt bewezen als hier voor.

Ook blijkt hieruit, dat wanneer *de* = $\frac{1}{3}$ *ab* is, de kleine driehoek $\frac{1}{9}$ van den grooten zal zijn. En wanneer *de* = $\frac{2}{3}$ *ab* is, dan zullen de driehoeken tot elkander ſtaan als 4 : 9. Of de eene zal $\frac{4}{9}$ van den anderen zijn.

Aan twee zijden.

Wanneer men dit voorzet dan verkrijgen de kinderen eene herhaling, maar tevens eene meerdere en noodzakelijke bevestiging van het voorgaande. Zoo kan men b. v. als in fig. 93, de evenwijdige lijnen op de helft, op een derde, enz. trekken en laten zoeken en bewijzen wat gelijk en ongelijk is.

Ook kan men als in fig. 94, de eene lijn op de helft en de andere op een derde trekken en laten bewijzen, dat de inhoud der ſtukken tot elkander en tot het geheel ſtaat als 1, 8, 12, 15 en 36.

En oordeelt men het noodig, dan kan men drie evenwijdige lijnen trekken; maar zelden gaat men daartoe over.

 §. 11.

§. 11.

Deeling van Vierhoeken.

Het ware mogelijk voor velen niet noodig hier iets van de deeling der vierhoeken te zeggen, maar alzoo anderen het tegendeel wenſchen, zal hier eene korte aanwijzing volgen. Men moet beſtendig onder het oog houden, dat de gang, welken men in de behandeling der driehoeken gevolgd heeft, ook hier moet gevolgd worden, al ware zelfs, in de volgende aanſtipping, die orde niet bepaald in acht genomen.

In een *quadraat* kan men de lijn evenwijdig en niet evenwijdig aan de zijden trekken.

De niet evenwijdige kan uit een punt in een der zijden, of uit eenen hoek getrokken worden.

Die uit den hoek getrokken wordt, kan den tegenoverliggenden hoek ontmoeten, of eene zijde treffen.

Op deze wijze kan men vervolgens 2, 3, 4 lijnen, enz. trekken. En hoe men die weder op verſchillende wijze kan vereenigen, zal hij, die den geest gevat heeft, zelf inzien. Men doet in alles naauwkeurig bewijzen, wat gelijk en ongelijk is, zonder zich door de uitvoerigheid te laten afſchrikken. Bovenal komt uit het behandelde deze waarheid voort, *dat de inhoud van een quadraat ge-*

gevonden wordt, door de lengte der twee zijden om den regten hoek met elkander te vermenigvuldigen.

Even als men met het *quadraat* handelt, gaat men ook met den *regthoek* te werk, waaruit dan mede voortkomt, dat de diagonaal denzelven in twee gelijke deelen deelt, en dat de inhoud gevonden wordt, door de twee zijden om eenen regten hoek met elkander te vermenigvuldigen.

Met het parallelogram wordt even zoo gehandeld; waarin dan ook onder anderen zal bewezen worden:

Van een parallelogram zijn de tegenoverſtaande zijden en hoeken aan elkander gelijk, en de diagonaal deelt hetzelve in twee gelijke driehoeken.

Een parallelogram wordt door twee diagonalen in vier gelijke driehoeken gedeeld; de eene diagonaal is langer dan de andere, en beide deelen elkander in twee gelijke deelen.

Op de parallelogrammen volgen de *Trapeziums*, waarvan niet veel te zeggen is.

Een hoeklijn deelt een paralleltrapezium in twee deelen.

Twee hoeklijnen van een paralleltrapezium kunnen gelijk of ongelijk zijn.

Trekt men in een paralleltrapezium twee hoeklijnen, dan wordt het in twee gelijke en twee ongelijke deelen gedeeld.

Uit deze laatſte ſtelling, alsmede uit hetgene vroeger van parallelogrammen tusſchen evenwijdige lijnen gezegd is, kan nu afgeleid worden hetgene

 nog

nog volſtrekt van de gelijkheid van drie- en vierhoeken moet gezegd worden.

De parallelogrammen, die op dezelfde bazis en tusſchen dezelfde parallele lijnen ſtaan, zijn even groot.

(Zie fig. 95.)

Bewijs. Wanneer men in deze figuur de △n *ace* en *bdf* beſchouwt, dan ziet men

dat	∠ *ace*	=	∠ *bdf*	is
	∠ *aec*	=	∠ *bfd*	
Dus	∠ *cae*	=	∠ *dbf*	
	ac	=	*bd*	
	ae	=	*bf*	
Daarom	△ *ace*	=	△ *bdf*	
	△ *deg*	=	△ *deg*	
Rest	*agdc*	=	*bfeg*	
	△ *abg*	=	△ *abg*	
Derh.	▭ *abdc*	=	▭ *abfe.*	

De parallelogrammen, die op gelijke bazis en tusſchen dezelfde evenwijdige lijnen ſtaan, zijn even groot.

(Zie

(Zie fig. 96.)

Bewijs. Men kan dit verfchillend bewijzen. Men kan vooronderftellen, dat het parallelogram *ghfe* langs de evenwijdige lijnen gelijkmatig kan voortgefchoven worden, zoo lang tot de bazis *gh* op *ab* komt, waardoor, uit het voorgaande, ▭ *abcd* = ▭ *ghfe* is.

Of men kan bewijzen dat *abfe* een parallelogram is

dan is ▭ *abdc* = ▭ *abfe*
▭ *abfe* = ▭ *ghfe*

Derh. ▭ *abdc* = ▭ *ghfe*.

De driehoeken, die op dezelfde bazis en tusfchen dezelfde evenwijdige lijnen ftaan, zijn even groot.

(Zie fig. 97.)

Bewijs. Naardien de △*n* halve parallelogrammen zijn, zoo wordt dit betoog uit het voorgaande gemakkelijk afgeleid. Ook dat

De driehoeken, die op gelijke bazis en tusfchen dezelfde evenwijdige lijnen ftaan, even groot zijn.

Waaruit weder voortvloeit:

Wanneer uit het midden eener zijde van eenen

dan is $\triangle$ *cde* = $\triangle$ *cep*
en $\triangle$ *aec* > $\triangle$ *cep*

Derh. $\triangle$ *aec* > $\triangle$ *cde*.

De vijfhoek is in drie gelijkbeenige driehoeken verdeeld, van welke een ſcherphoekig is, en twee ſtomphoekig zijn.

Trekt men *ad* en *bd*, dan wordt de vijfhoek in twee gelijke en twee ongelijke deelen verdeeld.

Wanneer men de lijn db *in den vijfhoek trekt, en* af *regthoekig op* mn *ſtelt, dan verkrijgt men 4 figuren, die 2 aan 2 gelijk zijn.*

(Zie fig. 101.)

Bewijs. In de regthoekige $\triangle$n *dgf* en *bgf*
is *df* = *bf*
en *fg* = *fg*

Dus $\triangle$ *dfg* = $\triangle$ *bfg*. Dat af
van *afdn* = *afbm*

Rest *agdn* = *agbm*.

Verder kan men de gelijkheid en ongelijkheid der lijnen bepalen.

Aanmerking. Het verdeelen van den vijfhoek door het trekken van lijnen evenwijdig aan een der zijden, levert niet veel op, evenwel kan de onderwijzer het beproeven.

---

§. 13.

Deeling van Zeshoeken.

Wanneer men in eenen zeshoek eene lijn van den eenen hoek tot den tegenoverſtaanden trekt, dan wordt de zeshoek in twee gelijke deelen gedeeld.

(Zie fig. 102.)

Om dit te bewijzen trekt men de lijnen *ae* en *ac*; wanneer men gemakkelijk kan betogen, dat $\triangle$ *afe* = $\triangle$ *abc*, en ingevolge daarvan $\triangle$ *aed* = $\triangle$ *acd* is, waaruit dan blijkt hetgene in het voorſtel gezegd is.

Ook volgt uit dit bewijs, dat wanneer uit eenen hoek drie lijnen tot de tegenoverſtaande hoeken getrokken worden, de zeshoek in 2 aan 2 gelijke deelen gedeeld wordt.

De bovengevondene deelen zijn of gelijk aan $\frac{1}{6}$ van den geheelen zeshoek of gelijk aan $\frac{1}{3}$.

(Zie fig. 102.)

Bewijs. Om dit te bewijzen trekt men uit *c* tot het midden van *ad*, de lijn *cg*. Daardoor is

$$\triangle\ abc = \triangle\ agc = \triangle\ gcd.$$

En hieruit is het gevraagde duidelijk.

Aanmerking. De onderwijzer kan de deeling der zeshoeken verder voortzetten, door van andere en tot andere hoeken lijnen te halen, alsmede evenwijdige lijnen aan de zijden te trekken, en de overeenkomst der figuren, waarin dezelve gedeeld worden, te bepalen, zoo in opzigt tot de grootte, als in overeenkomst der zijden.

Ook zetten wij de behandeling der veelhoeken niet verder voort, om niet te uitgebreid te worden, maar ſporen den onderwijzer daartoe aan; wanneer hij een oneindig getal van waarheden zal vinden, en tevens leeren zien hoe vruchtbaar dit onderwerp van onderwijs is ter ontwikkeling van het verſtand.

§. 14.

bepaalden afſtand, tusſchen het verlengde van twee zijden eene lijn evenwijdig aan de derde zijde trekt, dan zal deze lijn dezelfde reden tot de evenwijdige hebben, als een der verlengde zijden tot den bepaalden afſtand.

(Zie fig 106.)

Het is duidelijk, dat wanneer men *gf* op den afſtand van twee derde van *ab* gelijk *ae*, evenwijdig aan *bc* trekt, Δ *agf* gelijkhoekig en gelijkzijdig is met den Δ *ade*. Zoodat hetgene van Δ *agf* ten opzigte van den Δ *abc* waarheid is, ook van Δ *ade* en Δ *abc* moet gezegd worden; waardoor het overige van zelf ſpreekt.

Na dit bewijs zet de onderwijzer alles nog een weinig voort, tot dat hij met deze waarheid kan eindigen: *gelijkhoekige driehoeken zijn gelijkvormig.*

Aanmerking. Dit is genoeg om alles wat volgt voort te zetten en goed te begrijpen. De onderwijzer behoort in den aanvang het kind op de gelijkvormigheid te wijzen; en wil hij toonen hoe daaruit evenredigheden voortvloeijen, dan handelt hij in den geest dezer afdeeling. Wij gaan nu over tot het deelen van driehoeken,

trekt, en wel op een derde van de lengte, dat er dan een kleine driehoek zal ontstaan, die gelijkhoekig is met den voorgaanden en waarvan de zijden ieder $\frac{1}{3}$ deel van de gelijkstandige des grooten driehoeks is. Terwijl de onderwijzer dit voordraagt, stelt hij intusschen fig. 103 op het bord, en zegt: even als *cd* de lijn *be* op een derde snijdt, zoo ontmoet de evenwijdige *df* ook de lijn *ab* op een derde van de geheele lengte, en daar *cd* gelijk *af* is, zoo is $cd = \frac{1}{3}\ ab$, enz.

Verder herinnert de onderwijzer aan deze waarheid: *Wanneer men in eenen ongelijkzijdigen driehoek eene lijn evenwijdig aan een der zijden trekt, en wel op een derde van de lengte der lijn, dan zullen de zijden van den kleinen driehoek, ieder een derde van de gelijkstaande in den grooten driehoek zijn. Ook zullen de driehoeken gelijkhoekig zijn.*

Aanmerking. Wanneer zoodanige waarheden door den leerling, bij wijze van herinnering, wederom vlug worden voorgesteld en bewezen, dan is hij geschikt om verder te kunnen voortgaan.

De onderwijzer moet in het laatste geval den kleinen driehoek ook buiten den grooten leggen (fig. 105.) en doen aantoonen, dat dit geene verandering baart; waaruit dan gemakkelijk wordt afgeleid:

Wanneer men buiten een driehoek, op eenen be-

bepaalden afſtand, tusſchen het verlengde van twee zijden eene lijn evenwijdig aan de derde zijde trekt, dan zal deze lijn dezelfde reden tot de evenwijdige hebben, als een der verlengde zijden tot den bepaalden afſtand.

(Zie fig 106.)

Het is duidelijk, dat wanneer men *gf* op den afſtand van twee derde van *ab* gelijk *ae*, evenwijdig aan *bc* trekt, Δ *agf* gelijkhoekig en gelijkzijdig is met den Δ *ade*. Zoodat hetgene van Δ *agf* ten opzigte van den Δ *abc* waarheid is, ook van Δ *ade* en Δ *abc* moet gezegd worden; waardoor het overige van zelf ſpreekt.

Na dit bewijs zet de onderwijzer alles nog een weinig voort, tot dat hij met deze waarheid kan eindigen: *gelijkhoekige driehoeken zijn gelijkvormig.*

Aanmerking. Dit is genoeg om alles wat volgt voort te zetten en goed te begrijpen. De onderwijzer behoort in den aanvang het kind op de gelijkvormigheid te wijzen; en wil hij toonen hoe daaruit evenredigheden voortvloeijen, dan handelt hij in den geest dezer afdeeling. Wij gaan nu over tot het deelen van driehoeken,

Door

Door het trekken van bepaalde lijnen

Uit de hoeken.

Als in eenen gelijkzijdigen driehoek abc, *de lijn* bd *perpendiculair uit den tophoek op de bazis valt, en eene andere lijn* cf, *den perpendiculair in het midden doorsnijdt; zoo vraagt men, welk deel* bf *van* ab *zal zijn.*

(Zie fig. 107.)

Oplossing. Verleng cf en trek bg evenwijdig aan ac tot zij het verlengde in g ontmoet;

Dan is $\angle gbe = \angle edc$
$\angle geb = \angle dec$
$be = de$

Dus $gb = dc = \frac{1}{2}\, ac$
Verder is $ac : gb = af : bf$
en ac tweemaal zoo groot als gb;
Derh. af tweemaal zoo groot als bf.

Wanneer men vooronderstelt, dat in den vorigen driehoek de lijn cf, *op* $\frac{1}{4}$ *van de hoogte, den perpendi-*

diculair doorſnijdt; welke waarheden kan men dan vinden?

(Zie fig. 107.)

Oplosſing. Dan is $be = \frac{1}{3} de$ $\quad be = \frac{1}{4} bd$

$bg = \frac{1}{3} dc$ $\quad eg = \frac{1}{4} cg$

of $bg = \frac{1}{6} ac$ $\quad$ en $fg = \frac{1}{7} cg.$

Dus $bf = \frac{1}{6} af$ $\quad$ Dus $ef = \frac{3}{28} cg.$

of $bf = \frac{1}{7} ab$

Nu is ef en fg te zamen $\frac{1}{4}$ van cg, dus $ce = \frac{3}{4} cg.$

Daarom ſtaat $\frac{3}{4} : \frac{3}{28} = ce : ef$

Derh. $ef = \frac{1}{7} ce.$

In den gelijkzijdigen driehoek aec *is de lijn* be *zoodanig getrokken, dat* bc $= \frac{1}{3}$ ac *is, en* ad *zoodanig, dat* cd $= \frac{1}{5}$ ce *is; vrage welk deel is* bf *van* be?

(Zie fig. 108.)

Oplosſing. Trek de lijn *eg* evenwijdig aan *ac* tot zij het verlengde van *ad* in *g* ontmoet.

Dan is $cd = \frac{1}{6} de$

Dus $ac = \frac{1}{6} eg.$

1 is $\frac{1}{6}$ wat dan $\frac{2}{3}$ van $ac = ab$

Dus $ab = \frac{1}{9} eg$

Nu is $ab : eg = bf : ef$

Derh. $bf = \frac{1}{9} ef.$

Als

Als uit de hoeken a *en* c *van den gelijkzijdigen driehoek* abc, *de lijnen* af *en* cd *tot op* $\frac{1}{3}$ *van de tegenoverstaande zijden worden getrokken: vraagt men, welk deel is* ed *van* ec, *en* ae *en* ef, *ieder bijzonder, van* ag?

(Zie fig. 109.)

Oplosfing. Trek *cg* evenwijdig aan *ab* en verleng *af*, tot zij de vorige in *g* ontmoet.

Dan is $bf = \frac{1}{2} fc$
Daarom $ab = \frac{1}{2} cg$.
en $af = \frac{1}{2} fg = \frac{1}{3} ag$.

Ook is $ad = \frac{1}{3} ab = \frac{1}{6} cg$
Dus $de = \frac{1}{6} ec$.

Verder is $af = \frac{1}{3} ag$
$ae = \frac{1}{7} ag$

$ef = \frac{4}{21} ag$.

Wanneer in den gelijkzijdigen driehoek abc *de lijn* av *op* $\frac{1}{8}$ *en* be *op* $\frac{1}{7}$ *van de tegenoverstaande zijden worden getrokken; zoo vraagt men naar de bepaling der deelen.*

(Zie

(Zie fig. 110.)

Oplosſing. Verleng de beide lijnen tot zij de lijn, die door c evenwijdig aan de bazis getrokken is, in g en h ontmoeten.

Dan is $yb = \frac{1}{8}\, bc = \frac{1}{7}\, cy$.
Wanneer dus $by = 1$ is, dan $cy = 7$
Ook is daarom $ch = 7$, zoo $ab = 1$ is.
Op gelijke wijze is $ae = 1$, wanneer $ce = 6$ is.

De bazis $ab = \frac{1}{6}\, gc$
Ook $ab = \frac{1}{7}\, ch$

Dus $ab = \frac{1}{13}\, gh$,
$bo = \frac{1}{13}\, og$,
en $ao = \frac{1}{13}\, oh$.

Verder is $ay = \frac{1}{7}\, yh$ en $be = \frac{1}{6}\, eg$; hieruit en uit het bovenſtaande volgt,

dat $ay = \frac{1}{8}\, ah$ en	$be = \frac{1}{7}\, bg$ is;
$ao = \frac{1}{14}\, ah$	$bo = \frac{1}{14}\, bg$
Rest $oy = \frac{3}{56}\, ah$	$eo = \frac{1}{14}\, bg$
$ao = - \frac{1}{14}\, ah$	$bo = \frac{1}{14}\, bg$
Dus $oy : ao = 3 : 4$	Derh. $eo = bo$
Dat is $4 oy = 3\, ao$	

H Men

Men kan het trekken van lijnen aldus voortzetten en vragen, b. v. *Als in den gelijkzijdigen driehoek* abc *de* $\angle$ acb *door* dc *midden doorgedeeld wordt, en indien dan* bf *door het midden van* dc *gaat; hoe ſtaan dan de deelen tot elkander?* Ook kan men zeggen: *Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek* abc *de* $\angle$ cab, *door* ad, *en* $\angle$ abc *door* be *midden doorgedeeld worden, dan is* $\triangle$ afe = $\triangle$ bfd *en* $\triangle$ abf = *het ſtuk* efdc, *enz.*

Als in den gelijkbeenigen driehoek acf *de tophoek door de lijn* bf *midden door gedeeld wordt, en de lijn* ah *zoodanig getrokken wordt, dat* bd = $\frac{1}{4}$ bf *is; zoo vraagt men, welk deel is* ch *van* cf?

(Zie Fig. 111.)

Oplosſing. Trek *fg* evenwijdig aan *ac* tot zij het verlengde van *ah* in *g* ontmoet.

Dan is	$bd = \frac{1}{3}\, df = \frac{1}{4}\, bf$
Dus	$ab = \frac{1}{3}\, fg$
Daarom	$ac = \frac{2}{3}\, fg$
en	$ch = \frac{2}{3}\, fh = \frac{2}{5}\, cf.$

Omgekeerd kan men vragen: als $ch = \frac{2}{7}\, cf$ is, wat deel is dan *bd* van *bf?* En dit door de kinderen laten vinden.

Aan-

Aanmerking. Wij achten dit genoegzaam om den onderwijzer te doen zien, hoedanig hij dit behoort in te rigten. Wij gaan dus over tot het deelen van driehoeken

Door het trekken van bepaalde lijnen uit de zijden.

Tot herinnering dient, hetgene te voren is aangetoond, dat wanneer men in den gelijkzijdigen driehoek uit $\frac{1}{3}$ der zijden eene lijn evenwijdig aan de bazis trekt, het bovenſte deel $\frac{1}{9}$ van den geheelen driehoek is. Trekt men die op $\frac{2}{5}$ van boven, dan is het bovenſte deel $\frac{4}{25}$. Trekt men die op $\frac{3}{5}$, dan is het $\frac{9}{25}$, enz.

Ook is bewezen, dat een driehoek in zoo veel deelen verdeeld wordt, als de bazis zelve, wanneer men die in gelijke deelen verdeelt, en uit den tophoek tot de deelpunten lijnen trekt. Dit in het oog houdende, zal het volgende niet moeijelijk te vinden zijn.

Indien men in den gelijkzijdigen driehoek abc *uit het midden van* ac *op* $\frac{1}{3}$ *van* bc, *de lijn* de *trekt, hoe ſtaan dan de deelen tot elkander?*

(Zie fig. 112.)

Oplosſing. Trek de lijn *df* evenwijdig aan de bazis.

Dan is $cf = \frac{1}{2}\, bc$

$ce = \frac{1}{3}\, bc$

$ef = \frac{1}{6}\, bc = \frac{1}{2}\, ce$

En daarom $\triangle\, def = \frac{1}{2} \triangle\, dec = \frac{1}{3} \triangle\, dcf$

en $\triangle\, dcf = \frac{1}{3}\, abfd$

Dus $\triangle\, dcf = 1$ tegen $abfd = 3$

af $\triangle\, def = \frac{1}{3}$, bij $\triangle\, def = \frac{1}{3}$

Komt $\triangle\, dce = \frac{2}{3}$ tegen $abed = 3\frac{1}{3}$

---3

Derh. $\triangle\, dce : abcd = 2 : 10 = 1 : 5$.

Indien in den vorigen driehoek het punt d *op* ⅓ *van* ac *en het punt* e *op* ¼ *van* bc *ſtond; welk deel zou dan de* △ cde *van den geheelen driehoek zijn?*

Dit vindt men als hier voor is aangetoond. Evenwel kan men daartoe ook eenen anderen weg inſlaan en fig. 113 gebruiken. In deze zijn de lijnen *be* en *bf* op ⅓ van *ac* getrokken; dan zijn de driehoeken *abf*, *bef* en *bce* aan elkander gelijk, en

en elk ⅓ van den △ *abc*. Indien men dan uit den tophoek van den △ *bec* de lijn *ed* op ½ van *bc* trekt, dan wordt △ *bec* in 4 gelijke driehoeken verdeeld, waarvan *cde* een is; dus is die ¼ van ⅓ dat is $\frac{1}{12}$ van den geheelen driehoek.

Wanneer in eenen gelijkzijdigen driehoek eene lijn wordt getrokken, die de eene zijde op ⅓ en de andere op ¼ van boven treft. Welk deel is ieder ſtuk van het geheel?

De oplosſing kan uit het voorgaande worden afgeleid.

Indien de zijden op ¾ en ⅓ worden getroffen. Vrage als voren.

De oplosſing blijkt uit het voorgaande.

Aanmerking. Deze voorſtellen zijn genoegzaam om tot voorbeelden te dienen, of om aan te wijzen hoedanig dezelve behooren ingerigt te worden. De onderwijzer is aan geenen band gebonden, alleen houdt hij de hoofdverdeeling in het oog. Thans gaan wij over tot het deelen van driehoeken,

door het trekken van bepaalde lijnen

uit hoeken en zijden.

In den gelijkzijdigen driehoek abc *ſtaat* cd *per-*

 pen-

pendiculair op ab, *en* fg *is uit het midden van* ac *en op* $\frac{1}{3}$ *van* bc *getrokken. Daardoor is* eg = $\frac{2}{3}$ ef.

(Zie fig. 114.)

Oplosfing. Trek de lijn *af.* Deze is evenwijdig met *bc* en daardoor ook *af* = *df.*

Verder is $cg = \frac{1}{3}\, bc = \frac{1}{3}\, ac = \frac{2}{3}\, af = \frac{2}{3}\, df.$

en $df : cg = ef : eg$

$df : cg = 1 : \frac{2}{3}$

Dus $ef : eg = 1 : \frac{2}{3}$

Dat is $eg = \frac{2}{3}\, ef.$



Wanneer in den gelijkzijdigen driehoek abc *de lijn* eh *zoodanig is getrokken, dat zij* ac *op hct midden, en* bc *op* $\frac{1}{4}$ *snijdt, alsmeae* dc, *de bazis, op* $\frac{1}{4}$ *ontmoet; vrage naar de grootte der deelen.*

(Zie fig. 115.)

Wanneer men het vorige wel begrepen heeft, dan kan de oplosfing hiervan niet moeijelijk zijn.

Aanmerking. Aldus kan men verder voortgaan, en zoo lang voortzetten als men voor

zij-

zijne leerlingen noodig oordeelt. Daarna gaat men tot de gelijkbeenige driehoeken over, en handelt daarmede als geleerd is.

§. 15.

Deeling van het Quadraat.

Door het trekken van bepaalde lijnen

Uit de hoeken.

Wanneer in het quadraat abcd, *de lijn* de *op* $\frac{1}{3}$ *van* cb *wordt getrokken, in welke deelen van het geheel is dan het quadraat verdeeld?*

(Zie fig. 116.)

Oplossing. Trek *ef* evenwijdig aan *ab*.

Dan is *abef* = $\frac{1}{3}$ van het quad.
Dus *fecd* = $\frac{2}{3}$ ————————
2————————
Komt △ *cde* = $\frac{1}{3}$ van het quad.
en dus *abed* = ————————

Wanneer in een quadraat uit twee hoeken, tot de tegenoverstaande, lijnen worden getrokken; wat is dan gelijk?

Dit is gemakkelijk te vinden.

Wanneer in het quadraat abcd *de hoeklijn* bd *en de lijn* ce *op* ¼ *van* ab *wordt getrokken; in welke betrekking ſtaan dan de deelen tot elkander?*

(Zie fig. 117.)

Dit is mede gemakkelijk te vinden.

Wanneer men hier alle gevallen wilde geven, dan zou ons beſtek verre te buiten gegaan en ons doel gemist worden, dat hoofdzakelijk ſtrekt, om den onderwijzer eene handleiding te geven, en geenszins, om alles voor hem uit te werken. Vandaar zijn hier niet dan de voornaamſte gevallen voorgedragen, zonder op eene geleidelijke opklimming acht te geven, vooronderſtellende, dat de onderwijzer, daar waar de ſprong te groot is, wel een aantal tusſchen gevallen zal bedenken en de kinderen doen uitwerken.

Zoo in het quadraat abcd *de lijn* ae *op* ¼ *en de lijn* cf *op de helft getrokken is, welke is dan de betrekking tusſchen de deelen.*

(Zie fig. 118.)

Oplosſing. Trek de lijn *fh* evenwijdig aan *ab* en *eg* evenwijdig aan *ad.*

Dan

Dan is $ak = ke = \frac{1}{2}\, ae.$

$ok = \frac{1}{2}\, ag = \frac{1}{8}\, ab = \frac{1}{8}\, fh.$

$oh = \frac{1}{2}\, fh.$

$kh = \frac{5}{8}\, fh.$

Dus $fk = \frac{3}{8}\, fh. = \frac{3}{8}\, dc$

Nu is $fk : ec = fr : rc = kr : er$

of $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = fr : rc = kr : er$

——(8

Komt $3 : 2 = fr : rc = kr : er$

Is nu $kr : er = 3 : 2$

Dan is $ke = 5$ zulke deelen

$ak = 5$

Daarom $ae = 10$ zulke deelen.

Derh. $ar : re = 8 : 2$ of $4 : 1.$

Dat is $ar = \frac{4}{5}\, ae$

$er = \frac{1}{5}\, ae.$

Wanneer in het quadraat abcd *de lijnen* ae *en* be *tot op de helft van* dc *worden getrokken, dan zal de* △ aed = △ bce = ¼ △ abe *zijn.*

(Zie fig. 119.)

Bewijs. Trek *ef* perp. op *ab.*

Dan is $\angle ade = \angle bce$ $\triangle ade = \triangle afe$

$ad = bc$ en $\triangle bce = \triangle fbe$

$de = ec$ Dus $\triangle ade + \triangle bce = \triangle aef + \triangle fbe$

Daarom $\triangle ade = \triangle bce$ of $\triangle ade = \frac{1}{4}\, \triangle abe.$

Door het trekken van bepaalde lijnen

Uit de zijden.

Zoo in het quadraat abcd *de lijnen* fg *en* eh *zoodanig getrokken worden, dat* ae $= \frac{1}{3}$ ab *en en* bf $= \frac{1}{5}$ ab *is, alsmede* dg $= \frac{1}{7}$ cd *en ch* $= \frac{1}{4}$ cd; *zoo vraagt men naar de betrekking der deelen van die lijnen.*

(Zie fig. 120.)

Bewijs.

$$\begin{array}{rl} ae & = \frac{1}{3}\,ab \\ bf & = \frac{1}{5}\,ab \\ \hline ae + bf & = \frac{8}{15}\,ab \\ ab & = 1\,ab \\ \hline \text{Dus } ef & = \frac{7}{15}\,ab \end{array} \qquad \begin{array}{rl} dg & = \frac{1}{7}\,cd \\ ch & = \frac{1}{4}\,cd \\ \hline dg + ch & = \frac{11}{28}\,cd \\ cd & = 1\,cd \\ \hline \text{Dus } gh & = \frac{17}{28}\,cd = \frac{17}{28}\,ab. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} ei : ih = fi : ig & = ef : gh \\ ef : gh & = \frac{7}{15} : \frac{17}{28} \\ \hline \text{Dus } ei : ih = fi : ig & = \frac{7}{15} : \frac{17}{28} \\ & \quad\text{———— } 420 \\ \text{Derh. } ei : ih = fi : ig & = 196 : 255 \end{array}$$

In het quadraat abcd *zijn de lijnen* ef *en* gh *van en op* $\frac{1}{3}$ *der zijden getrokken. Men vraagt naar*

naar de betrekking, welke de daardoor ontstane ingesloten figuren tot elkander hebben?

(Zie fig. 121.)

Oplossing. De regth. *efcd* $= \frac{1}{3}$ *abcd*

3 ———————————

$\frac{1}{3}$ *efcd* $= \frac{1}{9}$ *abcd*

$\frac{1}{3}$ *efcd* $=$ *eigd*

———————————

Komt *eigd* $= \frac{1}{9}$ *abcd*

ahgd $= \frac{1}{3}$ *abcd*

———————————

Komt *ahie* $= \frac{2}{9}$ *abcd*.

De regth. *ahie* $= \frac{2}{9}$ *abcd*

ifcg $= \frac{2}{9}$ *abcd*

eigd $= \frac{1}{9}$ *abcd*

———————————

Komt het stuk *ahifcgde* $= \frac{5}{9}$ *abcd*. Dit

Van *abcd* $= \frac{9}{9}$ *abcd*

———————————

Blijft *hbfi* $= \frac{4}{9}$ *abcd*.

Het andere is mede zeer ligt te vinden.

Op gelijke wijze kan men voortgaan en de deelen op de eene zijde $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, enz. maken, terwijl men de andere zijde anders verdeelt.

Zoo men in het quadraat abcd, *de lijn* ef *op* $\frac{1}{3}$ *en* $\frac{2}{3}$ *trekt; vraagt men naar de overeenkomst der deelen?*

(Zie

(Zie fig. 122.)

Oplossing. Trek *fg* evenwijdig aan *ab* en *eh* evenwijdig aan *ad.* Dan is *hbce* = $\frac{1}{2}$ *abcd*

4.

$\frac{1}{4}$ *hbce* = $\frac{1}{8}$ *abcd*

$\frac{1}{4}$ *hbce* = △ *cef*

Derh. △ *cef* = $\frac{1}{8}$ *abcd.*

Het overige is zeer gemakkelijk te vinden.

Indien ef *en* eg *in het quadraat* abcd *op* *van* cd *en* $\frac{1}{4}$ *van* ab *getrokken zijn; dan vraagt men naar de overeenkomst der deelen met het geheel.*

(Zie fig. 123.)

Dit is gemakkelijk te vinden.

Door het trekken van bepaalde lijnen

Uit hoeken en zijden.

Wanneer in het quadraat abcd *de hoeklijn* ac ge-

getrokken, en de lijn ef *zoodanig gesteld wordt, dat* df $= \frac{4}{5}$ cd *en* ae $= \frac{1}{2}$ ab *is; hoe staan dan de deelen der lijnen tot elkander?*

(Zie fig. 124.)

Oplossing. Wanneer men in aanmerking neemt, dat *ab* evenwijdig aan *cd* is, en $fc = \frac{4}{5}\, cd = \frac{4}{5}\, ab$ en $ae = \frac{1}{2}\, ab$,

Dan heeft men

$$cf : ae = cg : ag = fg : eg = \tfrac{4}{5} : \tfrac{1}{2} = 8 : 5.$$

Het is duidelijk, dat men door deellijnen anders te trekken, andere overeenkomsten zal verkrijgen.

In het quadraat abcd *wordt de diagonaal* bd *getrokken, en de lijn* ef *zoodanig gesteld, dat het verlengde* af $= \frac{1}{5}$ ab *en* ce $= \frac{1}{4}$ *cd is. Hoe snijden dan de lijnen elkander?*

(Zie fig. 125.)

Oplossing. Hier is $bf = 1\tfrac{1}{5}\, ab = 1\tfrac{1}{5}\, cd$
$de = 1\tfrac{1}{4}\, cd$

Dus $bf : de = bg : dg = fg : eg\ 1\tfrac{1}{5} : 1\tfrac{1}{4} = 24 : 25$

Wanneer in een quadraat abcd, *de diagonaal* ac *en de lijn* ef *zoodanig getrokken wordt, dat* cf $= \frac{1}{3}$ cd, *en* ae $= \frac{1}{4}$ ab *is; hoe groot zullen dan de deelen van dit quadraat zijn?*

(Zie

(Zie fig. 130.)

Oplosſing. Trek *ef* en *or* perpendiculair op dezelve,

$$
\begin{array}{rl}
\text{dan is } abef = & \tfrac{1}{3}\, ablq \\
ablq = & ablq \\
\hline
\text{Rest } felq = & \tfrac{2}{3}\, ablq \\
4) \overline{\qquad\qquad} & \\
\text{Komt } \triangle\, elr = & \tfrac{1}{6}\, ablq = \triangle\, fqr. \\
\text{en dus } \triangle\, efr = & \tfrac{1}{3}\, ablq
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{Ook is } abef = & \tfrac{1}{3}\, ablq \\
abcd = & \tfrac{1}{4}\, ablq \\
\hline
\text{Dus } dcef = & \tfrac{1}{12}\, ablq \\
\triangle\, efr = & \tfrac{1}{3}\, ablq \\
\hline
\text{Komt } dcerf = & \tfrac{5}{12}\, ablq.
\end{array}
$$

Wanneer in een quadraat abcd *de diagonaal* ac *getrokken is en* be *en* bf *zoodanig geſteld worden, dat zij* cd *en* ad *op* $\tfrac{1}{4}$ *in* e *en* f *ontmoeten, zoo vraagt men als voren.*

(Zie fig. 131.)

De oplosſing laten wij den onderwijzer over.

§ 16.

§. 16.

Deeling der Regthoeken of Parallelogrammen.

Wij kunnen en behoeven in deze paragraaf niet zoo uitgebreid te zijn, als in de voorgaande; naardien men uit het behandelde genoeg kan afmeten, hoe het volgende dient voorgedragen te worden. Wij zullen evenwel van ieder een voorbeeld geven.

Indien in een parallelogram (abcd) *de beide diagonalen worden getrokken, dan wordt het in vier gelijke driehoeken gedeeld.*

(Zie fig. 132.)

Bewijs. In de Δn *abe* en *dec* heeft men

$$ab = cd$$
$$\angle bae = \angle ecd$$
$$\angle abe = \angle edc$$

Daarom $ae = ce$ en $be = de$

Derh. $\Delta\, ade = \Delta\, cde = \Delta\, bce = \Delta\, abe$,

omdat zij op gelijke bazis ſtaan en twee aan twee uit hetzelfde punt getrokken zijn.

 Wan-

Wanneer men in een parallelogram abc*lijn* ef *op de helft van* ab *en* cd *trekt, ma op* ½ *van* bc *en* ad; *vraagt men naar de bet lijke waarde der ingeslotene figuren.*

(Zie fig. 133.)

Oplossing. Trek *eh* en *fg*; dan is in de △ en *afg*

$$
\begin{aligned}
ch &= ag \\
ec &= af \\
\angle\, ech &= \angle\, fag \\
\hline
\text{Dus}\quad eh &= fg \\
\text{en } \triangle\, ech &= \triangle\, afg \\
\angle\, hec &= \angle\, afg
\end{aligned}
$$

en dus *eh* ook evenwijdig met *fg*.

Verder wordt even gemakkelijk bewezen,

$$
\begin{aligned}
\text{Dat } \triangle\, ohe &= \triangle\, fgo \text{ is,} \\
oe &= of \\
\text{en } oh &= og
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Daarom}\quad \triangle\, ohe &= \triangle\, fgo \\
\triangle\, ech &= \triangle\, afg \\
\hline
\text{Dus}\quad ohce &= afog. \text{ Dit } af \\
\text{Van}\quad efbc &= afed \\
\hline
\text{Rest}\quad ofbh &= oedg.
\end{aligned}
$$

Als in een parallelogram een diagonaal wordt getrokken, en door het midden van denzelven eene regte lijn, dan is het parallelogram in vier deelen verdeeld, die twee aan twee aan elkander gelijk zijn.

(Zie fig. 134.)

Bewijs. In de Δn *age* en *cef*
is $\angle aeg = \angle cef$
$\angle eag = \angle ecf$
en $ae = ec$

Dus $\Delta\, age = \Delta\, cef$. Dit
Van $\Delta\, abc = \Delta\, adc$

Blijft $bceg = aefd$.

Men kan dit voortzetten en uit het midden of uit andere deelen van de zijden lijnen trekken en over den inhoud der ftukken laten oordeelen. Dit regelt de onderwijzer naar de vermogens en de wezenlijke vorderingen der kinderen.

---

§. 17.

Deeling der Vijfhoeken.

Wanneer in eenen regelmatigen vijfhoek abcde *de lijnen* ec *en* eb *worden getrokken, zoo vraagt men naar hetgene daardoor, in die figuur, is op te merken.*

(Zie fig. 135.)

Oplosfing. In den $\triangle$ *cde*

$\angle cde + \angle dce + \angle ced = 2 \llcorner$

$\angle dce = \angle ced$

Dus $\angle cde + 2 \angle ced = 2 \llcorner$

$\angle cde = 1\frac{1}{5} \llcorner$

Rest $2 \angle ced = \frac{4}{5} \llcorner$

2

Komt $\angle dce = \angle ced = \frac{2}{5} \llcorner$

Dit is ook van $\angle aeb = \frac{2}{5} \llcorner$

Dus $\angle ced + \angle aeb = \frac{4}{5} \llcorner$ Dit

Van $\angle dea = 1\frac{1}{5} \llcorner$

Rest $\angle bec = \frac{2}{5} \llcorner = \angle ce = \angle ced.$

Omdat nu $\angle bec = \angle dce$ is, zoo is *be* even-

wij-

wijdig met *cd* en op gelijke wijze *ec* evenwijdig met *ab*.

Verder bewijst men gemakkelijk, dat *ce* = *be* is, alsmede △ *abe* = △ *cde*, maar kleinder dan △ *bec*.

Wanneer in den zelfden veelhoek nog eene derde lijn ac *wordt getrokken, zoo vraagt men als voren.*

(Zie fig. 136.)

Oplossing. De △n *cde* en *cef* zijn gelijk.

Want omdat *ac* evenwijdig aan *de*, en *be* evenwijdig aan *cd* is, zoo is ∠ *dec* = ∠ *ecf*

∠ *ecd* = ∠ *cef*

Ook is *ce* = *ce*

Dus △ *cde* = △ *cef*

Verder is *de* = *bc* = *ab*

cd = *ab* = *ae*

∠ *cde* = ∠ *abc* = ∠ *bae*

△ *cde* = △ *abc* = △ *bae*

△ *cde* = △ *cef*.

Komt △ *cde* = △ *abc* = △ *bae* = △ *cef*.

Eindelijk △ *abc* = △ *bae*

△ *abf* = △ *abf*

Rest △ *bcf* = △ *afe*.

---

de lijnen dg *en* ei *op de helft van* ab *en* bc *trekt*, *vraagt men of de lijn* ch, *die den* ∠ bcd *midden door deelt*, *ook door het snijpunt* f *zal gaan?*

(Zie fig. 139.)

Bewijs. Men trekt de lijn *fk* op de helft van *cd* en vervolgens *ik*. Waardoor het bewijs, dat ∠ *fck* = ∠ *fci* is gemakkelijk gevonden wordt.

Aanmerking. Wij geven hier alleen aanleiding, en willen geenszins zeggen, dat de deeling der vijfhoeken hiermede uitgeput is. Integendeel zal de onderwijzer wel doen dit nog verder voort te zetten, en de gelegenheid waarnemen van het kind aan te sporen, om mede een of ander geval of voorstel op te geven.

---

§. 18.

Deeling der Zeshoeken.

In eenen regelmatigen zeshoek abcdef *getrokken zijnde de lijnen* be *en* ad, *zoo vraagt men naar hetgene in deze figuur is op te merken.*

(Zie

(Zie fig. 140.)

Oplosfing. Trek *ae*, dan zijn in de △n *afe* en *aeg* de zijden gelijk, en dus de hoeken, die tegen over gelijke zijden ftaan, aan elkander gelijk; dus ∠ *fae* = ∠ *aeg* en daardoor *be* evenwijdig aan *af*.

Om dezelfde reden is *dc* evenwijdig aan *be*; waaruit volgt, dat *af* evenwijdig aan *cd* is.

Hieruit kan men befluiten, dat een regelmatige zeshoek zes zijden heeft, die twee aan twee evenwijdig zijn.

Men ziet hier tevens, dat *agef* en *bcdg* ruiten zijn van gelijke grootte.

Ook is △ *abg* = △ *deg*, en *abcd* = *adef*, of *bcde* = *abef*.

Verder moet bewezen worden, dat wanneer men *cg* trekt en verlengt, dezelve in *f* komt.

Wijders is △ *abg* = △ *bcg* = △ *cdg* = △ *deg* = △ *efg* = △ *fag* = △ *aef*, waardoor men aanneemt, dat een regtmatige zeshoek in zes gelijke driehoeken kan gedeeld worden.

Wanneer in den regelmatigen zeshoek abcdef *eene lijn* gh *wordt getrokken, en wel van de helft tot op een vierde van* ab; *zoo vraagt men naar de betrekking der deelen van den zeshoek.*

 (Zie

(Zie fig. 141.)

Oplossing. Men trekt de lijnen zoo als zij in de figuur zijn voorgesteld; dan heeft men Δ *bcd* = $\frac{1}{6}$ van den zeshoek, volgens voorgaand bewijs. Omdat *hi* op de helft getrokken is, zoo moet Δ *bcd* = $\frac{1}{3}$ *ibcdh* zijn; waaruit weder blijkt, dat Δ *bcd* = $\frac{1}{2}$ *ibdh* is.

Nu ziet men dat

Δ *gih* =	$\frac{1}{4}$ *ibdh* =	$\frac{1}{6}$ *ibcdh* =	$\frac{1}{12}$ *abcdef* is,
ibdh =		$\frac{2}{3}$ *ibcdh* =	$\frac{1}{3}$ *abcdef*
Δ *bcd* =		$\frac{1}{3}$ *ibcdh* =	$\frac{1}{6}$ *abcdef.*
Dus *gbcdh*		=	$\frac{7}{12}$ *abcdef.*
en *aghef*		=	$\frac{5}{12}$ *abcdef.*

In eenen zeshoek met eenen uitwendigen hoek, en waarvan ab = af, bc = cd, de = ef = $\frac{1}{2}$ af = $\frac{1}{2}$ ab *is, en de hoeken regt, worden de lijnen* ae, ac *en* bf *getrokken; vrage welk deel ieder der ingeslotene figuren van den zeshoek uitmaakt?*

(Zie fig. 142.)

Oplossing. Trek, volgens de figuur, de gestipte lijnen, dan is *abgf* een quadraat, waarvan Δ *abc* de helft van de helft, en dus gelijk $\frac{1}{4}$ van het geheel is.

is. Dit is ook waar van den $\triangle$ *aef*; en naardien *dcge* mede $\frac{1}{4}$ van het geheele quadraat is, zoo blijft er voor *acde* ook een vierde deel van het quadraat, dat is $\frac{1}{3}$ deel van den zeshoek over.

Omdat $dc : ab = ch : ah$ is
en $dc = \frac{1}{2} ab$

Zoo is ook $ch = \frac{1}{2} ah$
en dus $ch = \frac{1}{3} ac$
Daarom $\triangle cdh = \frac{1}{3} \triangle acd = \frac{1}{6}$ *acde*
Derh. $\triangle cdh = \triangle eid = \frac{1}{18} abcdef$
Om dezelfde reden is $dh = \frac{1}{2} bh$.
Dus $\triangle bch = 2 \triangle chd = \frac{1}{9} abcdef$,
Ook $\triangle efi$ . . . . $= \frac{1}{9} abcdef$.
Daarom $\triangle abh = \triangle aif = \frac{2}{9} abcdef$.

Wanneer in denzelfden zeshoek abcdef, *de lijnen* bf, ae *en* gh *tot op de helft van* ab *en* af *getrokken zijn; dan vraagt men als voren.*

(Zie fig. 143.)

Dit is gemakkelijk op te losfen.

Indien men in genoemden zeshoek de lijnen bf, ac *en* fg *op de helft van* ab *trekt; vraagt men als voren.*

(Zie

(Zie fig. 144.)

In deze moet gevonden worden hetgene door het voorgaande nog niet bekend is, als:

$\triangle$ *afg* = $\frac{1}{8}$ van den zeshoek.
$\triangle$ *aeg* = $\frac{1}{15}$ ——————
$\triangle$ *aef* = $\frac{4}{15}$ ——————
gbke = $\frac{7}{45}$ ——————
$\triangle$ *fkl* = $\frac{8}{45}$ ——————

Aanmerking. Ieder gevoelt hoe verre dit nog kan voortgezet worden, maar wij houden het voorgedragene genoegzaam voor eene handleiding.

VIERDE AFDEELING.

OVER DEN VLAKKEN INHOUD VAN FIGUREN, EN DERZELVER VERBINDING MET ELKANDER EN OP DE ZIJDEN VAN ANDERE FIGUREN.

§. 19.

De inhoud van vlakke Figuren.

O. Te voren hebben wij de grootte der dingen bepaald, door dezelve met andere te vergelijken, het-

hetzij het deelen van het geheel waren, of dat zij tot het geheel zelf in betrekking werden gebragt; thans moeten wij dit verder voortzetten, maar met een meer bepaald oogmerk, namelijk om de grootte te leeren vinden van allerlei figuren, door vergelijking met een en dezelfde grootheid, die in dat geval *maat* genoemd wordt. Wat is nu maat?

K. Waarmede men iets meet.

O. En neemt ieder eene maat naar eigen verkiezing?

K. Neen, de maten zijn bepaald.

O. Zou men, zonder die bepaling, wel elkander altijd kunnen verstaan?

K. Neen.

O. Men zou telkens moeten vragen: welk is uwe maat, niet waar? enz. (De onderwijzer praat verder over maat zoo als hij denkt, dat het voor zijne leerlingen noodzakelijk is.) Welke vaste maten kent gij wel?

K. Een roede, voet, duim, mijl, el, enz.

O. Dat zijn alle maten om de lengte der dingen te meten. Maar kent gij ook maten om de oppervlakte der dingen te bepalen, b. v. van de grootte van deze vloer?

K. Neen.

O. Dat zijn vierkante maten. (Wij laten de verdere uitbreiding voor den onderwijzer over.)

K. Ik heb nooit zulke vierkante maten gezien.

O. Die kan men ook niet bij zich dragen, maar hoe langer en breeder een vierkant is, hoe grooter het moet zijn; en omgekeerd kleinder.

Dus

Dus hangt een vierkant van deszelfs lengte en breedte af; daarom denkt men altijd aan de lengte en breedte, en bepaalt daardoor bij zich zelven de grootte; waaruit blijkt dat lengte-maten in alle gevallen en ook hier den grooten dienst bewijzen. Wij hebben te voren de figuren door lijnen evenwijdig aan de zijden gedeeld, ook een *quadraat*. Wanneer men nu een quadraat had (gelijk hier op het bord, zie fig. 145.) waarvan de zijden ieder viermaal eene zekere maat bevatten, en men trekt op al die punten lijnen, in hoe veel vierkanten zal dan dit quadraat verdeeld zijn?

K. In 16 deelen.

O. En ieder van die deelen zal weder een quadraat zijn. Wanneer nu ieder van die kleine quadraten een voet lang en breed is, dan zegt men dat het een vierkante voet is, dus bevat het groote quadraat in dat geval?

K. 16 Vierkante voeten.

O. En hoe komt gij nu aan die 16?

K. Vier quadraten naast elkander op de bazis en dat viermaal boven elkander geeft 4 × 4 of 16.

O. Dat is zeer goed, en gij hebt dit uit het vroeger behandelde (bl. 98 en 99) wel onthouden. Men vindt dus den inhoud van een quadraat door de lengte van eene zijde met zich zelve te vermenigvuldigen. Hoe veel is de inhoud van een quadraat wiens zijden ieder 12 roeden zijn?

K. 144 Vierkante roeden.

De onderwijzer zet dit voort en brengt dit tot de grootste duidelijkheid.

O.

O. Zulk een quadraat, hetzij vierkante roede, vierkante voet, vierkante duim of ook vierkante mijl, gebruikt men altijd tot het meten van oppervlakten, hoe zij ook zijn mogen. Is de oppervlakte zeer uitgebreid, dan bezigt men eene groote maat tot eenheid, terwijl men eene kleinere bezigt, wanneer het vlak weinig uitgeſtrektheid heeft.

K. Gebruikt men vierkante mijlen ook?

O. Ja, om b. v. de oppervlakte der geheele aarde te bepalen, bezigt men zulk eene groote maat, omdat eene vierkante roede of voet hier weinig zou afdoen. Laat ik u nu eenige waarheden opgeven en beproef dan uwe krachten, om mij dezelve te bewijzen.

K. Dat is mij een groot genoegen, ik zal doen wat ik kan.

> *Aanmerking.* Wij zullen hier de waarheden opgeven en bewijzen, en aan den onderwijzer de behandeling zelve overlaten, vertrouwende dat hij genoegzaam bedreven zal zijn, om ook hier de heuristiſche methode in alle opzigten toe te pasſen.

Men vindt den inhoud van eenen regthoek door *de lengte der twee zijden, om den regten hoek, met elkander te vermenigvuldigen.* Zie fig. 146.

Bewijs. Laat de eene zijde van den regthoek, b. v. *ab* in *e*, *f*, *g*, enz. dat is: in een aantal gelijke deelen verdeeld zijn. Neem dat de zijde *bc*, in dezelfde deelen in *h*, *i*, enz. gedeeld wordt;

wordt; als ook dat uit al die deelpunten lijnen evenwijdig aan de zijden *bc* en *ab* getrokken zijn; dan moet volgen dat de regthoek in zoo veel kleine gelijke regthoeken verdeeld is, als er deelen in de bazis voorkomen; en dat ieder van die kleine regthoeken weder in zoo veel deelen verdeeld worden als er deelen in de andere zijde begrepen zijn. Is nu het aantal der kleine regthoeken gelijk aan de bazis, en wordt ieder derzelve in zoo veel deelen verdeeld als er gelijke deelen in de opſtaande zijde begrepen zijn; dan moet men, om al de ſtukken te vinden, waarin de geheele regthoek verdeeld wordt, het getal der deelen, van de bazis, met het aantal deelen van de opſtaande zijde vermenigvuldigen. Het ſpreekt van zelve dat ieder dezer deelen quadraat deelen zijn, hetzij □ roeden, □ voeten, □ duimen, wat men ook voor maat genomen moge hebben. Waaruit volgt, dat de regthoek *abcd* = *ab* × *bc* is.

Is nu *ab* = 4 of 9,25.
en *bc* = 3 of 2,07.

Dan is *ab* × *bc* = 12 of 19,1475.
Dat is □ *abcd* = 12 of 19,1475.

O. Welke vierhoek volgt op den regthoek?

K. Het parallelogram.

O. Nu, zie hier een parallelogram; waaraan is de inhoud gelijk?

K.

K. Mij dunkt, dat kan niet hetzelfde zijn met den regthoek.

O. Laat ons dit onderzoeken. Gij behoort te denken aan hetgene wij vroeger getoond hebben.

K. En wat is dat meester?

O. Hebben wij te voren niet eene overeenkomst gevonden tusfchen alle parallelogrammen, en dus de regthoek mede daaronder begrepen, naardien hij toch met deze, alle eigenfchappen gemeen heeft? Zullen wij nu in ftaat zijn eenig vergelijk te maken, dan moeten wij vooraf aan die te voren gevondene overeenkomst denken. Zij was deze: (de Onderwijzer fchrijft fig. 147 op het bord) *de parallelogrammen, die op dezelfde bazis en tusfchen dezelfde parallele lijnen ftaan, zijn aan elkander gelijk.* Wanneer gij dit nu overweegt, en tevens denkt aan hetgene wij zoo even van den regthoek bewezen hebben, dan hebt gij alles om den inhoud van het parallelogram te bepalen.

K. Dan moet het parallelogram aan hetzelfde gelijk zijn, waaraan de regthoek gelijk is.

O. En waaraan is de inhoud van den regthoek gelijk?

K. Aan *ab* vermenigvuldigd met *bc.*

O. Wat is *ab* van den regthoek en van het parallelogram tevens?

K. De bazis.

O. Goed. En wat is *bc* van den regthoek en tevens van het parallelogram?

K. De andere zijde van den regthoek, die met

de bazis eenen regten hoek maakt, en de hoogte van het parallelogram.

O. Men zegt de *perpendiculaire* hoogte. En welk besluit maakt gij nu op?

K. De regthoek is gelijk aan *ab* vermenigvuldigd met *bc* en het parallelogram ook.

O. Ja, zeer goed; maar dit laatste moet gij met woorden uitdrukken, die aan het parallelogram beantwoorden.

K. Dan is het dus: *het parallelogram is gelijk aan de bazis vermenigvuldigd met de perpendiculaire hoogte.* Dit is: $abfe = ab \times bc = ab \times fg$.

Aanmerking. Dit achten wij genoegzaam, om den Onderwijzer te toonen, hoedanig hij met de kinderen over deze zaken kan handelen. Wij zullen daarom, en om niet te uitgebreid te worden, verder de waarheid alleen voorstellen en zoo kort mogelijk bewijzen.

Van eenen regthoekigen driehoek is de inhoud gelijk aan het vermenigvuldigde van twee zijden, om den regten hoek, gedeeld door 2.

(Zie fig. 148.)

Bewijs. Trek *cd* evenwijdig aan *ab* en *ad* evenwij-

wijdig aan *bc*, tot zij elkander in *d* ontmoeten; dan is *abcd* een regthoek.

Nu is ▭ *abcd* = *ab* × *bc*

2 ─────────────

Komt Δ *abc* = $\frac{ab \times bc}{2}$

of Δ *abc* = ½ *ab* × *bc*.

of Δ *abc* = *ab* × ½ *bc*.

Van eenen scheefhoekigen driehoek is de inhoud gelijk aan het vermenigvuldigde van de bazis met de perpendiculaire hoogte, gedeeld door 2.

(Zie fig. 149.)

Bewijs. Trek *ae* evenwijdig aan *bc* en *ce* evenwijdig aan *ab*, tot zij elkander in *e* ontmoeten; dan is *abce* een parallelogram.

Nu is ▭ *abce* = *ab* × *cd*

2 ─────────────

Komt Δ *abc* = $\frac{ab \times cd}{2}$

Van een regthoekig trapezium is de inhoud gelijk aan de helft van de som der beide regthoekszijden, vermenigvuldigd met de bazis.

(Zie fig. 150.)

Bewijs. Trek *de* evenwijdig aan *ab*, alsmede *bd*.

$$\text{Dan is } \triangle\, abd = \frac{ad}{2} \times ab$$

$$\triangle\, bcd = de \times \frac{bc}{2} = \frac{bc}{2} \times ab$$

$$\text{Komt trap. } abcd = \left(\frac{ad + bc}{2}\right) \times ab.$$

Van een paralleltrapezium is de inhoud gelijk aan de som der evenwijdige zijden, gedeeld door 2, vermenigvuldigd met derzelver regthoekigen afstand.

(Zie fig. 151.)

Bewijs. Trek *de* en *cf* perpendiculair op *ab*;

$$\text{dan is } \square\, cdef = ef \times de = \frac{ef + dc}{2} \times de$$

$$\triangle\, aed = \frac{ae}{2} \times de$$

$$\triangle\, bcf = \frac{bf}{2} \times cf = \frac{bf}{2} \times de$$

$$\text{Dus trap. } abcd = \left(\frac{ab + cd}{2}\right) \times de.$$

Voor-

Voorbeelden.

1. Wat is de inhoud van een quadraat, wanneer een der zijden 4; $17\frac{5}{8}$ of 32, 75 roeden lang is?

2. Welk is de inhoud van eenen regthoek, wiens beide zijden om den regten hoek zijn 16,32 en 3,05 roeden?

3. Hoeveel is de inhoud van eenen regthoekigen driehoek, wiens bazis 7,32 en de andere regthoekszijde 32,25 roeden is?

4. Hoe groot vindt gij den inhoud van een parallelogram, waarvan de bazis 33,6 en de perpendiculaire hoogte 21,275 Nederlandſche ellen is?

5. Zeg mij den inhoud van eenen ſcheefhoekigen driehoek, wiens bazis 321 en de perpendiculaire hoogte 9,05 roeden is?

6. Welk is de inhoud van een regthoekig trapezium, wanneer de bazis 36,8 voeten en de opſtaande zijden 21,3 en 16,54 voeten zijn?

7. Welk is de inhoud van een parallel trapezium, wanneer de evenwijdige zijden zijn 9,16 en 12,5 en de regthoekige afſtand 7,38?

§. 20.

De vereeniging van Figuren in Lijnen en Punten.

Hier kunnen driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken, enz. met elkander verbonden worden. Over de mogelijkheid der verbindingen en derzelver regelmatige opvolging, leze men het eerste stuk, bl. 80.

Het spreekt van zelf, dat alle verbindingen te beschouwen een werk van veel te groote uitgebreidheid zou zijn, en dat het ook even zoo weinig aan het doel zou beantwoorden. Het is dus den Onderwijzer overgelaten, alle gevallen na te gaan, de belangrijke en gewigtige daaruit te nemen en den leerling in eene goede opeenvolging voor te dragen. Het is waar, dat men, wat de eigenschappen der figuren betreft, dikwijls zal ontmoeten, wat te voren reeds is aangetoond, maar dit is eensdeels voor kinderen noodig, en anderdeels komen die zaken weder uit geheel andere figuren voort, waardoor de veelzijdige beschouwing der dingen, bij het kind buitengewoon veel wint.

Wij willen hier een paar belangrijke gevallen voordragen en dan verder voortgaan.

Wanneer men twee gelijkzijdige driehoeken in zes punten vereenigt, dan kan men hebben:

1e. (Zie fig. 152.) *Zes* gelijke figuren en *een* on-

ongelijke. De ongelijke is zoo groot als de zes gelijke te zamen. Men heeft 18 gelijke zijden en 30 hoeken, waarvan 18 en 12 gelijk zijn. Ieder der 18 gelijke hoeken is $\frac{2}{3}$, en ieder van de 12 gelijk $\frac{4}{3}$ van eenen regten hoek. Ieder der zijden van de beide gelijkzijdige driehoeken is in drie gelijke deelen gedeeld. De ongelijke figuur is een regelmatige zeshoek.

2e. (Zie fig. 153.) kan die vereeniging 3 en 4 gelijke figuren geven. Om dit te verkrijgen, maakt men den vierhoek *b* grooter, dan den driehoek *a*, en wel zoo veel grooter, dat men van den vierhoek *b* nog twee kleine driehoeken aan de beide einden kan wegſnijden.

Even zoo kan men twee gelijkbeenige driehoeken in 1 tot 6 punten vereenigen.

Dit alles is zeer dienſtig ter ontwikkeling, en om de kinderen zeker te maken, in alle voorkomende gevallen.

Men kan ook *quadraten* in punten of lijnen, of in beide vereenigen, en daaruit belangrijke waarheden afleiden, gelijk wij door een paar voorbeelden zullen aantoonen.

Vereenigt men twee quadraten zoodanig in vier punten, gelijk fig. 154 *aanwijst, zoo verkrijgt men vier gelijke en eene ongelijke figuur. De ongelijke is een quadraat en grooter dan ieder der vorige, maar gelijk aan alle vier te zamen.*

Vereenigt men twee gelijke quadraten in acht punten, dan heeft men acht gelijke gelijkbeenige regthoekige driehoeken. (Fig. 155.)

---

§. 21.

Verbinding van Figuren op de zijden van andere Figuren.

Van de driehoeken.

Wanneer men op de drie zijden van eenen gelijkzijdigen driehoek, drie gelijkzijdige driehoeken maakt, dan zijn allen gelijk aan elkander en aan den eersten driehoek.

Dit is gemakkelijk te bewijzen.

> *Aanmerking.* Men kan hier verschillende gevallen maken, door nu eens de geheele zijden tot bazis der nieuwe figuren aan te nemen, dan weder bepaalde deelen van ieder derzelve. In het laatste geval verkrijgt men figuren, wier inhoud en in zekere betrekking tot elkander staan; ook kan men de grootte der hoeken en de overeenkomst der zijden bepalen. Wij gebruiken hier iedere zijde geheel.

Wanneer men op de drie zijden van eenen gelijkbeenigen driehoek, drie gelijkbeenige regthoekige drie-

driehocken beschrijft; dan heeft men twee gelijke driehoeken, ieder zoo groot als de eerste driehoek, en eenen ongelijken, maar die zoo groot is als de beide anderen te zamen.

(Zie fig. 156.)

Dit is zeer gemakkelijk te bewijzen. Ook geldt hier mede de laatstvoorgaande aanmerking.

Wanneer de zijden van den driehoek de langste zijden of hepotènusen van de opgeschrevene driehoeken zijn; hoe is het dan gesteld?

(Zie fig. 157.)

Oplossing. Laat hiertoe *ef* door *a* parallel aan *bc* zijn, en *bf* en *ce* perp. op *ef*, alsmede *cd* evenwijdig aan *ab*, en *bd* evenwijdig aan *ac*; dan zijn de beide driehoeken van de onderstelde gedaante. En verder is het gemakkelijk te bewijzen.

Men kan dus algemeen zeggen:

Wanneer men op de drie zijden van eenen regthoekigen gelijkbeenigen driehoek drie driehoeken van dezelfde soort en op dezelfde wijze stelt, dan

 is

is de driehoek op de hepotenuse gelijk aan de som der twee driehoeken op de andere zijden.

Wanneer op de zijden van eenen ongelijkzijdigen regthoekigen driehoek, regthoekige driehoeken worden beschreven, die met den eersten gelijke hoeken hebben, en verder zoodanig gesteld zijn, dat de zijden des eersten driehoeks de schuinsche of langste zijden van de andere driehoeken, zijn; dan zijn de beide driehoeken op de regthoekszijden beschreven, te zamen zoo groot als de driehoek op de hepotenuse.

(Zie fig. 158.)

Bewijs. Laat *abc* de gegevene driehoek zijn; trek dan *de* evenwijdig met *ac*, en uit *a* en *c*, perpendiculair op *de*, de lijnen *ad* en *ce*, dan zijn de △n *bce* en *abd* gelijkhoekig met △ *abc*. Trek verder *af* evenwijdig aan *bc* en *cf* evenwijdig aan *ab*, dan is △ *acf* mede gelijkhoekig met △ *abc*, en zelfs gelijk.

Nu is, omdat zij op dezelfde bazis *ac* en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen *ac* en *de* staan.

$$\square\ adec = 2\ \triangle\ abc$$
$$\triangle\ abc = \triangle\ abc$$

Rest $\triangle\ abd + \triangle\ bce = \triangle\ abc$

$$\triangle\ abc = \triangle\ afc$$

Derh. $\triangle\ abd + \triangle\ bce = \triangle\ afc.$

Wan-

Wanneer alles is als voren, maar de zijden van den eersten driehoek de kortste regthoekzijden van de opgeschrevene driehoeken uitmaken, dan moet hetzelfde bewezen worden.

(Zie fig. 159.)

Bewijs. Laat *ad* regthoekig op *ac* staan en $\angle\ acd = \angle\ acb$ zijn. Verleng *ad* en *bc* tot zij elkander in *e* ontmoeten, dan is $\triangle\ abe$ gelijkhoekig met $\triangle\ abc$. Verleng vervolgens *ab* en maak $\angle\ bcf = \angle\ bca$, dan is $\triangle\ bcf$ mede gelijkhoekig met den eersten driehoek.

Nu blijkt het duidelijk, dat *ac* perpendiculair op *de* staande, den $\triangle\ cde$ in twee gelijke deelen deelt, en dat dus

$$\triangle\ acd = \triangle\ abc + \triangle\ abe \text{ is}$$

en ook dat $\triangle\ abc = \triangle\ bcf$ is.

Derh. $\triangle\ acd = \triangle\ abe + \triangle\ bcf.$

Wanneer alles is als voren, maar de drie zijden van den eersten driehoek, de grootste regthoekszijden van de andere driehoeken uitmaken, dan moet hetzelfde bewezen worden.

(Zie

(Zie fig. 160.)

Wij laten het bewijs voor den leerling over.

Uit deze drie bewijzen vloeit wederom voort, dat, *wanneer men op de zijden van eenen regthoekigen driehoek drie driehoeken beschrijft, die gelijkhoekig, dat is, gelijkvormig met den eersten zijn, dan is de driehoek op de schuinsche zijde gelijk aan de som der beide anderen.*

Gelijk men dit nu van den regthoekigen driehoek heeft bewezen, zoo kan men het ook beproeven met den scherphoekigen en stomphoekigen driehoek.

Wanneer op de drie zijden van eenen gelijkbeenigen stomphoekigen driehoek drie driehoeken worden beschreven, die gelijkhoekig met den eersten zijn, en zoodanig gesteld, dat iedere zijde van den eersten driehoek, de grootste zijde van iederen opgeschrevenen driehoek is; dan is de driehoek, op de langste zijde beschreven, grooter, dan de twee anderen te zamen; en wel tweemaal den driehoek grooter, die door het trekken van eenen perpendiculair uit het einde van de langste zijde, volgens de figuur, gevormd wordt.

(Zie

(Zie fig. 161.)

Het bewijs, dat △ *acd* = △ *bch* + △ *abe* + △ *chi* + △ *aek* is, kan uit de figuren gemakkelijk opgemaakt worden.

Aanmerking. De Onderwijzer kan hier reeds zoo verre met zijne leerlingen zijn, dat hij hun de oplosſing der overige gevallen van den ſtomphoekigen driehoek geheel overlaat; zoo niet, dan helpt hij hen op den weg om het overige te vinden. Het behoeft naauwelijks herinnering, dat men, na den ſtomphoekigen driehoek te hebben afgehandeld, zich tot den ſcherphoekigen driehoek bepaalt, en de gelijkſoortige eigenſchappen tracht op te ſporen.

Hier laten wij nog eenige gevallen met bepalingen volgen.

Wanneer men op de drie zijden van eenen gelijkbeenigen driehoek, wiens tophoek $\frac{4}{3}$ ∟ is, drie driehoeken beſchrijft, die met den eerſten gelijkhoekig zijn; dan zijn de twee driehoeken op de gelijke zijden gelijk twee derde deelen op de langſte zijde.

(Zie fig. 162.)

Bewijs. Laat *abc* de driehoek en de andere gelijkhoekig met den eersten zijn; dan heeft men te bewijzen dat $ec = ac = cd$ is, wanneer het overige gemakkelijk gevonden wordt.

Wanneer de stompe hoek meer dan $\frac{4}{3}$ ∟ *is, zoo is de gelijkvormige driehoek op de langste zijde, meer dan driemaal zoo groot, als een zoodanige drie hoek op een der gelijke zijden.* (Men vooronderstelt, dat de drie zijden van den eersten driehoek, de langste zijden van de opgeschrevene driehoeken zijn.)

(Zie fig. 163.)

Bewijs. In deze figuur is *abc* de eerste driehoek, maar tevens de driehoek op de langste zijde beschreven; en *abd* een zoodanige driehoek op een der gelijke zijden. Trek daarin *be* evenwijdig aan *ad* en maak $cf = ae$.

Dan is $\triangle\, abd = \triangle\, abe = \triangle\, bcf$.
Ook is $\angle\, bad = \angle\, abe < \frac{1}{3}$ ∟
Dus ook $\angle\, cbf < \frac{1}{3}$ ∟

Daarom	$\angle\, abe + \angle\, cbf$	$< \frac{6}{3} \llcorner$	Dit
af van	$\angle\, abc$	$> \frac{4}{3} \llcorner$	
Dus	$\angle\, ebf$	$> \frac{2}{3} \llcorner$	
Verder is	$\angle\, aeb + \angle\, bef$	$= \frac{6}{3} \llcorner$	
	$\angle\, aeb$	$= \frac{4}{3} \llcorner$	
Rest	$\angle\, bef = \angle\, bfe$	$= \frac{2}{3} \llcorner$	

En daar nu in denzelfden driehoek de grootste hoek tegenover de grootste zijde staat, zoo is

$$ef > be$$
$$be = ae$$

Dus $ef > ae$
Daarom $\triangle\, bef > \triangle . abe$
En derh. $\triangle\, abc >$ dan $3\ \triangle\, abd$.

Wanneer in het voorgaande de stompe hoek minder dan $\frac{4}{3} \llcorner$, maar grooter dan een regte is, dan zal de driehoek op de langste zijde meerder dan tweemaal zoo groot en minder dan driemaal zoo groot als de driehoek op een der gelijke zijden zijn.

Dit wordt op dezelfde wijze bewezen.

Wanneer de stompe hoek grooter dan $\frac{4}{3} \llcorner$ is, dan is de driehoek, op de langste zijde, meer dan 3 maal

maal en minder dan 4 maal zoo groot als een driehoek op een der gelijke zijden.

Dit wordt als het voorgaande gevonden.

Nog voegen wij er ter opheldering der laatstvoorgaande aanmerking bij:

Indien abc *een ongelijkzijdige ſtomphoekige driehoek is en op de zijden gelijkvormige driehoeken* adc, bec *en* abf *worden beſchreven, dan is* △ adc = △ bec + △ abf + △ cei + △ afh.

(Zie fig. 164.)

De lijnen *ci* en *ah* zijn perpendiculair op het verlengde van *ef.*

Wanneer de △ *abc* ſcherphoekig is, en op de zijden gelijkvormige driehoeken (dat zijn driehoeken, die met den eerſten gelijkhoekig zijn) beſchreven worden, als *abd*, *bce* en *acf*; dan is △ *abd* = △ *bce* + △ *acf* — △ *bei* — △ *afh*, of △ *abd* + △ *bei* + △ *afh* = △ *bce* + △ *acf.*

(Zie fig 165.)

De lijnen *bi* en *ah* zijn perpendiculair op *ef.*

Dit

Dit achten wij genoeg gezegd, om den Onderwijzer te doen zien in welken geest deze afdeeling behoort behandeld te worden, en hoedanig de onderſcheidene deelen op elkander moeten volgen.

Indien de bedoeling hier alleen was, om kinderen met de voornaamſte grondwaarheden der meetkunde bekend te maken, dan zouden wij ons alleen tot datgene bepalen, wat volſtrekt gelijke uitkomſten geeft, en dus tot den regthoekigen driehoek; maar wij bedenken, dat de vormleer moet ſtrekken, om de kinderen te leeren, de dingen zoodanig te beſchouwen, dat al de mogelijkheden, waarin zij voorkomen, of kunnen voorkomen, berekend en door hen grondig gekend worden. Hieruit blijkt, dat men alle gevallen, die zich voordoen, geregeld moet beſchouwen, en geene overſlaan, al zou men dezelve ſlechts opnoemen.

Wij gaan over tot het ſtellen van quadraten op de zijden der driehoeken.

Het quadraat op de hepotenuſe van eenen gelijkbeenigen regthoekigen driehoek is gelijk de quadraten op de beide andere zijden.

Men bedenke, dat een gelijkbeenige regthoekige driehoek de helft van een quadraat is.



Het quadraat op de hepotenuſe van eenen regthoekigen ongelijkzijdigen driehoek, is gelijk de ſom der quadraten op de beide andere zijden.

(Zie fig. 166.)

Bewijs. Laat *abc* de gegevene driehoek zijn, dan moet bewezen worden, dat □ *acde* = □ *abgf* + □ *bcih* is. Trek daartoe *lm* en *kl* evenwijdig aan *bc* en *ab*, tot dat het verlengde der laatste dezelve in *k* en *m* ontmoet. Verleng vervolgens *ci* en *af*, tot zij elkander in *o*, en *fg* en *hi* tot zij elkander in *n* snijden, en trek *bn*.

Dan heeft men ∠ *cam* = ∠ *abc* + ∠ *bca*
∠ *cae* = ∠ *abc*

Rest ∠ *mae* = ∠ *bca*
ac = *ac*

Derh. △ *ame* = △ *abc*

Om gelijke redenen is

△ *abc* = △ *ame* = △ *del* = △ *cdk*.

Ook bewijst men gemakkelijk

dat △ *abc* = △ *aoc* = △ *bgn* = △ *bhn* is.

Verder toont men aan, dat *bm* = *ml* = *lk* = *bk* en tevens = *fo* = *oi* = *ni* = *nf* is; waardoor

men □ *bklm* = □ *fnio* heeft
af 4 △ *abc* = 4 △ *abc*

Rest □ *acde* = □ *abgf* + □ *bcih*.

Het

Het quadraat op de langſte zijde van eenen ſtomphoekigen gelijkbeenigen driehoek is gelijk tweemaal de quadraten op de twee gelijke zijden, min viermaal het quadraat van de lijn, die uit den ſtompen hoek perpendiculair op de langſte zijde getrokken wordt.

Verder bepaalt men de overeenkomst der quadraten op de zijden van eenen ongelijkzijdigen ſtomphoekigen driehoek, en dan van die op de zijden van eenen ſcherphoekigen driehoek; waarna men overgaat tot

§. 22.

De vergelijking van quadraten beſchreven op de zijden

van vierhoeken.

De vier quadraten op de zijden van een quadraat zijn aan elkander gelijk.

Het quadraat op de diagonaal van een quadraat is gelijk twee quadraten op de zijden.

Twee quadraten op de diagonalen van een quadraat zijn te zamen gelijk vier quadraten op de zijden.

 Van

Van vier quadraten op de zijden van eenen regthoek zijn twee aan twee aan elkander gelijk.

De vier quadraten op de zijden van eenen regthoek zijn gelijk de twee quadraten op de diagonalen.

De vier quadraten op de zijden van een parallelogram zijn gelijk de beide quadraten op de diagonalen.

(Zie fig. 167.)

Bewijs. Wanneer het laatfte gedeelte van de voorgaande paragraaf, betreffende de quadraten op de zijden van ftomphoekige en fcherphoekige driehoeken, behoorlijk wordt uitgewerkt, dan zal men aldaar verkrijgen:

Dat $\square\, bd + 2 \square\, ab, ac = \square\, ab + \square\, ad$ is
$\square\, ac = \square\, ab + \square\, bc + 2 \square\, ab, bf$

Dus $\square\, bd + \square\, ac + 2 \square\, ab, ac = 2 \square\, ab + \square\, ad + \square\, bc + 2 \square\, ab, bf$
$2 \square\, ab, ac = 2 \square\, ab, bf$

Daarom $\square\, bd + \square\, ac = 2 \square\, ab + \square\, ad + \square\, bc$
$2 \square\, ab = \square\, ab + \square\, cd$

Derh. $\square\, bd + \square\, ac = \square\, ab + \square\, ad + \square\, bc + \square\, cd$

De

De quadraten op de diagonalen van een regthoekig trapezium zijn kleiner, dan die op de vier zijden.

(Zie fig. 168.)

Bewijs. Laat *ce* regthoekig op *ab* ſtaan.

$$\text{Dan is } \square ac = \square ad + \square dc$$
$$bd = \square ad + \square ab$$

$$\text{Dus } \square ac + \square bd = \square ad + \square dc + \square ab + \square ad$$
$$\text{Maar } \square bc > \square ce = \square ad$$

$$\text{Derh. } \square ac + \square bd < \square ad + \square dc + \square ab + \square bc$$

VIJFDE AFDEELING.

OVER DEN CIRKEL.

§. 23.

Verdeeling van het onderwerp, en behandeling van het eerſte deel, het middelpunt.

Bij de behandeling van den cirkel komt alles op het middelpunt en de middellijn aan, naardien alle

eigenschappen met deze of met een van beide in betrekking staan.

Verder kunnen de lijnen in den cirkel, alsmede de deelen van denzelven, beide vermeld van bladzijde 2—6, opgenomen en beschouwd worden, waardoor de behandeling van deze afdeeling zich vervolgens bepaalt:

1. Tot het middelpunt.
2. Tot de straal, middellijn en omtrek.
3. Tot de chorden.
4. Tot de lijnen, die den cirkel raken, raaklijnen genoemd. En
5. Tot den inhoud van den cirkel en stukken van denzelven.

Het Middelpunt.

Het middelpunt staat, volgens bladzijde 4, overal even verre van den omtrek. *Maar kan een cirkel ook meer dan één middelpunt hebben?* Het tegendeel moet bewezen worden.

§. 24.

De straal, middellijn en omtrek.

Het zal hier genoeg zijn, slechts voor te stellen hetgene behoort bewezen te worden.

Al-

Alle ſtralen van eenen cirkel zijn even groot. Bewijs.

Twee ſtralen zijn te zamen gelijk aan eene middellijn.

Een ſtraal kan den cirkel niet deelen.

Alle middellijnen van eenen cirkel zijn aan elkander gelijk.

De middellijnen deelen elkander in twee gelijke deelen.

Iedere middellijn deelt den cirkel en deszelfs omtrek in twee gelijke deelen.

Twee middellijnen kunnen den cirkel in vier gelijke ſtukken deelen, die quadranten genoemd worden.

De omtrek kan de neiging van twee ſtralen tot elkander bepalen, en *dient* dus *om de grootte van eenen hoek te meten.*

Hoe onderſcheidt men de hoeken?

Het ſtuk van den cirkel, dat door een boog en twee ſtralen bepaald wordt, is te voren beſchreven.

Wanneer de hoeken aan het middelpunt gelijk zijn, dan zijn de bogen even groot. Vandaar kan men zeggen: *de gelijke hoeken aan het middelpunt ſtaan op gelijke bogen, en omgekeerd.*

Hoedanig ſtaat de omtrek tot de middellijn? Antw. Als 7 : 22, of als 100 : 314.

---

§. 25.

De Chorden.

Eene Chorde.

Het ſtuk van eenen cirkel, dat door eenen boog en eene chorde bepaald is, heet ſegment, en is te voren beſchreven.

Iedere chorde is kleiner, dan eene middellijn.

(Zie fig. 169.)

Bewijs. Van den driehoek abc

is $ac + bc > ab$
en $ac + bc = de$

Derh. $de > ab$

De hoek, dien eene chorde met eenen ſtraal maakt is altijd ſcherp.

(Zie de laatstgenoemde figuur.)

Bewijs. In den driehoek abc is $\angle\, cab = \angle\, abc$.

Nu

Nu kunnen in eenen driehoek geen twee regte hoeken, en nog minder twee ſtompe zijn, dus $\angle\, cab$ en $\angle\, abc$ beide ſcherp.

Wanneer is de chorde kleiner dan de ſtraal, en wanneer grooter?

De boog, die door eene chorde bepaald wordt, kan zeer klein zijn, en nimmer zoo groot als een halve omtrek.

(Zie de laatstvoorgaande figuur.)

Dit is zeer gemakkelijk aan te toonen.

De hoek, dien eene middellijn en chorde maakt, is half zoo groot als de hoek, die uit dezelfde punten door twee ſtralen aan het middelpunt gemaakt wordt.

(Zie fig. 170.)

Bewijs. Omdat $\angle\, abc + \angle\, bcd = \angle\, adc$ is
en $\angle\, abc = \angle\, bcd$

zoo is $2\,\angle\, abc = \angle\, adc$

2

Derh. $\angle\, abc = \frac{1}{2}\angle\, adc$

Wanneer dus de boog *ac* zoo veel graden bevat als ∠ *adc* groot is, dan bevat ∠ *abc* half zoo veel graden als de boog *ac*.

Dus kan men algemeen zeggen: de graden van eenen hoek aan den omtrek, zijn gelijk aan de helft van den boog, waarop hij ſtaat.

De boog, dien eene middellijn met eene chorde bevat, of de hoek, dien beide maken, kan zoo klein mogelijk, maar nimmer zoo groot als de halve omtrek eens cirkels of twee regte hoeken zijn.

(Zie de voorgaande figuur.)

Bewijs. Wanneer ∠ *abc* minder dan ∟ is, dan is ∠ *adc* minder dan 2 ∟. En wanneer ∠ *adc* een hoek zal blijven, en *adc* geene regte lijn worden, dan moet die hoek altijd minder dan 2 ∟ zijn, waardoor ∠ *abc* minder dan ∟ blijft. Hierdoor kan de boog *ac* ook nimmer den halven omtrek bevatten.

Dat ∠ *abc* zeer klein kan worden, behoeft geen betoog, want de neiging van twee lijnen kan hoe langer hoe kleiner worden.

Wanneer men uit het midden eener chorde eene lijn tot het middelpunt des cirkels trekt, dan ſtaat deze lijn perpendiculair op de chorde.

(Zie

(Zie fig. 171.)

Bewijs. Trek de ſtralen *ac* en *bc*;

$$\begin{array}{lrcl} \text{dan heeft men} & ad & = & bd \\ & cd & = & cd \\ & ac & = & bc \\ \hline \text{Derh.} & \angle\, adc & = \angle\, cdb = & \llcorner \end{array}$$

En dus *cd* perpendiculair op *ab*.

Hieruit kan men afleiden, dat wanneer men, uit het midden van eene chorde, eene perpendiculaire lijn trekt, deze door het middelpunt van den cirkel moet gaan.

Ook kan men laten aantoonen, dat wanneer men eene lijn ſcheefhoekig op het midden van eene chorde trekt, dezelve niet door het middelpunt kan gaan.

Wanneer men uit een punt van de chorde, buiten het midden, eene lijn perpendiculair trekt, dan kan dezelve niet door het middelpunt van den cirkel gaan; maar wel wanneer zij ſcheefhoekig op dezelve ſtaat.

Bewijs. Dit laten wij den Onderwijzer over.

Twee

Twee Chorden.

Twee chorden, in eenen halven cirkel, maken eenen regten hoek, in kleiner dan eenen halven cirkel maken zij eenen grooteren hoek, en in grooter deel eenen kleineren hoek.

(Zie fig. 172.)

Bewijs. In het eerste geval is de boog *adb* gelijk den halven omtrek, en dus ∠ *acb* = de helft van twee regte hoeken; derhalve ∠ *acb* = ∟.

In het tweede geval, is de boog *bca* grooter dan de helft van den omtrek, daarom ∠ *adb* = aan de helft van meer dan twee regte hoeken, derhalve ∠ *adb* > ∟.

In het derde gaval, is de boog *adb* kleiner dan de helft van den omtrek, daarom ∠ *acb* gelijk aan de helft van minder dan twee regte hoeken; derhalve ∠ *acb* < ∟.

Wanneer men twee ongelijke chorden uit hetzelfde punt van den omtrek trekt, alsmede eene middellijn, dan zal het andere uiteinde van de kortste chorde, het verste van het andere uiteinde der middellijn verwijderd zijn.

(Zie

(Zie fig. 173.)

Bewijs. Trek de lijnen *cd*, *bd* en *bc*; waarvan bewezen moet worden, dat als *ab* de kortfte chorde is, *bd* de grootfte regthoekige afftand is. De hoeken *abd* en *acd* zijn beide regt, en dus dienen *bd* en *cd* om de afftanden der punten *b* en *c* van het punt *d* te meten.

	∠ *abc*	<	2 ∟
	∠ *abd*	=	∟
Dus	∠ *dbc*	<	∟
Maar	∠ *bcd*	>	∟
Daarom	∠ *bcd*	<	∠ *dbc*
Derhalve	*bd*	>	*cd*.

Hieruit kan men als gevolg afleiden: dat wanneer twee regthoekige driehoeken gelijke hepotenufen hebben, en de eene regthoekszijde van dezen grooter dan de eene regthoeks zijde van genen is, dan zal de andere regthoekszijde van deze kleiner, dan de andere regthoekszijde van genen zijn; en omgekeerd.

Wanneer men in eenen cirkel twee gelijke chorden trekt, dan ftaan zij even verre van het middelpunt.

(Zie

(Zie fig. 174.)

Bewijs. Laat *ef* en *eg* perpendiculair op *ab* en *cd* zijn; en trek *be* en *de*.

Dan is $bf = gd$
$be = ed$
en $\angle efb = \angle egd = \llcorner$

Derhalve $ef = eg$.

En dus de beide chorden even verre van het middelpunt.

Ook kan men hier het omgekeerde laten bewijzen, namelijk: dat de chorden die even verre van het middelpunt ſtaan, aan elkander gelijk zijn.

Indien twee ongelijke chorden in eenen cirkel getrokken zijn, dan is de kortſte het verſte van het middelpunt verwijderd.

(Zie fig. 175.)

Bewijs. Trek *be* en *de*, alsmede *ef* en *eg* perpendiculair op *ab* en *cd*.

Dan is $ab > cd$
2
Komt $bf > dg$

Dus

Dus *bef* en *deg* regthoekige driehoeken met gelijke hepotenusen, maar met verschillende regthoekszijden; waaruit volgt: dat

Wanneer $bf > dg$ is
$ef < eg$ moet zijn.

En dus staat de kortste chorde het verst van het middelpunt.

Het omgekeerde, namelijk: *de chorde, die het verst van het middelpunt des cirkels staat is de kortste*, kan men ook laten bewijzen.

De hoek aan het middelpunt is tweemaal zoo groot als die aan den omtrek.

Bewijs. Wanneer eene chorde met eene middellijn eenen hoek maakt, is het reeds boven beweezen waarheid te zijn.

Wanneer twee chorden eenen hoek maken, zie fig. 176,

Dan is $\angle\, aed = 2 \angle\, abd$
en $\angle\, ced = 2 \angle\, cbd$

Daarom $\angle\, aec = 2 \angle\, abc$.

Wanneer de beide chorden aan dezelfde zijde van het middelpunt vallen, zie fig. 177,

Dan is $\angle\, dec = 2 \angle\, dbc$
en $\angle\, dea = 2 \angle\, dba$

Derhalve $\angle\, aec = 2 \angle\, abc$.

Hier-

Hieruit volgt: dat de hoeken aan den omtrek, die op ongelijke bogen ſtaan, ongelijk zijn; alsmede, dat de hoek aan den omtrek, die op eenen boog ſtaat, welke tweemaal zoo groot is, als de boog van eenen anderen hoek in denzelfden cirkel, ook tweemaal zoo groot, dan deze zal zijn.

Het is zeer gemakkelijk te zien, dat wij hier alleen de belangrijkſte gevallen vermelden, naardien men door het trekken van middellijnen tot de uiteinden der chorden, zoowel als door het midden of eenig ander punt derzelve vele andere eigenſchappen kan vinden. Ook kan men de beide chorden evenwijdig aan elkander trekken en van de eene tot de andere, lijnen trekken, waardoor mede vele waarheden zich voordoen.

Drie Chorden.

Drie gelijke chorden kunnen zoo getrokken worden, dat zij den geheelen omtrek beſpannen, of meerder of minder dan denzelven. Dit kunnen ook twee gelijke en een ongelijke, alsmede drie ongelijke chorden doen.

In het eerſte geval beſpant iedere chorde $\frac{1}{3}$ van den omtrek, en dus is iedere hoek $\frac{1}{6}$ van den omtrek of 60° groot.

Even als men de chorden in betrekking tot elkan-

ander en tot den omtrek beſchouwt, kan men dezelve ook in opzigt tot het middelpunt overwegen.

Wanneer men een der drie gelijke hoeken, die van drie gelijke chorden gemaakt zijn, door eene lijn in twee gelijke deelen deelt, dan gaat deze lijn door het middelpunt van den cirkel.

(Zie fig. 178.)

Bewijs. De lijn, die den tophoek van eenen gelijkzijdigen driehoek midden door deelt, ſtaat perpendiculair op de bazis, en deelt dezelve in twee gelijke deelen.

En de lijn, die perpendiculair op het midden van de chorde ſtaat, gaat door het middelpunt van den cirkel; derhalve gaat *cd* door het middelpunt *e*.

Deelt men twee, of alle drie de hoeken op deze wijze in twee gelijke deelen, dan doorſnijden deze deellijnen elkander in het middelpunt.

Deelt men een dezer hoeken midden door; alsmede eene chorde, dan zullen de deellijnen elkander in het middelpunt ſnijden.

Trekt men van het middelpunt des cirkels tot de drie hoeken drie lijnen; dan is iedere hoek

aan het middelpunt $= \frac{4}{3}$ ∟, *en dus tweemaal zoo groot als iedere hoek aan den omtrek.*

De Onderwijzer kan dit onderwerp onder de gegevene bepalingen verder voortzetten. Wij gaan over tot

Vier en meer Chorden.

Men kan de vier en meer chorden weder regelmatig afwisſelend op verſchillende wijze trekken, en daardoor eene menigte van eigenſchappen te voorſchijn doen komen. Wij zullen, om niet te uitgebreid te worden, ſlechts eenige gevallen voordragen.

Wanneer men vier gelijke chorden zoodanig trekt, dat zij den geheelen omtrek bevatten, welke figuur is er dan gemaakt, en hoe zijn de hoeken geſteld?

Zeer gemakkelijk toont men aan, dat het een quadraat is.

Trekt men drie gelijke en eene ongelijke chorde, of twee en twee gelijke, enz., die telkens den ge-

geheelen omtrek befpannen, zoo kan men zien hoe de hoeken ten opzigte van elkander en van eenen regten hoek gefteld zijn.

Verder kan men vier gelijke chorden, of twee en twee gelijk trekken, die in 3 of 2 punten, enz. vereenigd zijn, en wederom naar hetzelfde onderzoeken; doch de waarheden, die hierdoor gevonden worden zijn niet zeer belangrijk.

Wanneer men met vier ongelijke chorden den geheelen omtrek befpant, en aldus een vierhoek vormt, dan zijn daarin de tegenover elkander ftaande hoeken te zamen gelijk aan twee regte hoeken.

(Zie fig. 179.)

Bewijs. Trek de lijn *bd*

Dan is $\angle$ *bad* = ½ boog *dcb*
$\angle$ *bcd* = ½ boog *dab*

Komt $\angle$ *bad* + $\angle$ *bcd* = den halven omtrek des cirkels
maar de halve omtrek is = 2 ∟

Derh. $\angle$ *bad* + $\angle$ *bcd* = 2 ∟

(Zie fig. 180.)

Bewijs. Vooronderftellen, wij, dat zij er fcheefhoekig op ftaat, en dat dus *eabf* de raaklijn is. Trek dan uit *c* een perp. *cd* op *ef*, dan is deze korter dan de radius *bc* en dus het punt *d* binnen den cirkel; daarom kan de raaklijn niet fcheefhoekig op het einde van den ftraal ftaan, want dan fnijdt zij den cirkel; derhalve ftaat de raaklijn regthoekig op het einde van den ftraal of de radius.

Men kan hier bijvoegen, hetgeen wel niet onder de raaklijnen behoort, *dat eene regte den omtrek maar in twee punten kan fnijden.*

(Zie fig. 181.)

Bewijs. Laat de lijn *abcde* den omtrek in drie punten, *b*, *c*, *d*, fnijden; trek dan de ftralen *bf*, *cf* en *df*, dan zijn *bcf* en *cdf* gelijkbeenige driehoeken, en dus ∠ *dcf* < ∟, als ook ∠ *bcf*. Derhalve ∠ *bcf* + ∠ *dcf* < 2 ∟, en dus *bcd* geene regte lijn. Derhalve kan eene regte lijn den omtrek niet meer dan in twee punten fnijden.

Ver-

Verder kan men op deze wijze voortgaän, van het middelpunt tot de raaklijn regte lijnen trekken, en op de gelijkheid der zijden, hoeken en geslotene figuren letten. Ook kan men de kinderen aansporen, om de gewigtigste waarheden, die zich daarbij opdoen, op te zoeken en te betogen, ofschoon er niet vele voorkomen.

Twee raaklijnen.

Wanneer twee raaklijnen evenwijdig zijn, dan is de lijn, die men van het eene raakpunt tot het andere trekt eene middellijn.

Tusschen deze twee evenwijdige raaklijnen kunnen andere lijnen getrokken, en daaromtrent verschillende vragen gedaan worden.

Zoo kan men, zie fig. 182, vragen of de lijn *gh* door het middelpunt zal gaan, wanneer *fh* = *eg* is?

Wat er plaats zal hebben, wanneer *fh* > *eg* is?

Twee onevenwijdige raaklijnen kunnen elkander ontmoeten en eenen regten hoek als *nke*, of eenen stompen als *elm* of eenen scherpen maken.

Wanneer de twee raaklijnen evenwijdig zijn, dan verdeelen de raakpunten den omtrek in twee gelijke deelen. Zijn zij niet evenwijdig, dan in twee ongelijke deelen, waarvan het kleine deel door de beenen begrepen wordt, die eenen hoek maken.

Maken de beide raaklijnen eenen regten hoek,

dan zijn de raakpunten een vierde des omtreks van elkander verwijderd.

Al deze gevallen zijn gemakkelijk te begrijpen en te betogen.

De ſtralen of radiën, die bij de chorden getrokken werden, kunnen ook hier bij de raaklijnen getrokken en met dezelve vergeleken worden. Zoo is, in fig. 182, $nk = ni$, wanneer $\angle\ nke = ∟$ is; maar is de hoek ſtomp, gelijk $\angle\ elm$, dan is $lm < im$; doch zoo de hoek ſcherp is, dan moet de raaklijn grooter dan de radius wezen.

Het geeft ook eenige belangrijke uitkomſten, wanneer in die verſchillende gevallen van regte ſcherpe en ſtompe hoeken, in den vierhoek, b. v. *ekni* en *ielm*, enz. de hoeklijn, b. v. *ik*, enz. trekt.

Men kan verder bepalen, dat $\angle\ nkl$, die met $\angle\ nie$ op denzelfden boog ſtaat, alleen dan aan elkander gelijk zijn, wanneer de hoeken regt zijn. Over het grooter en kleiner worden kan men mede handelen.

Is de boog van den $\angle\ fin$ gelijk den boog des hoeks *nke*, dan zijn de hoeken *fin* en *nke* regt. In ieder ander geval is de boog *fn* zoo veel grooter of kleiner, dan $\frac{1}{4}$ van den omtrek des cirkels

kels als de boog *bn* kleiner of grooter dan hetzelfde ¼ is.

Wanneer men den hoek, dien twee raaklijnen maken, door eene lijn in twee gelijke deelen deelt, dan gaat de deellijn door het middelpunt.

Dit is gemakkelijk te bewijzen, waarom wij overgaan tot

Drie en meer raaklijnen.

Trekt men twee evenwijdige en eene niet evenwijdige raaklijn, in twee punten vereenigd, dan wordt daardoor den omtrek in twee gelijke deelen, daarna de eene helft weder in twee gelijke of in twee ongelijke deelen gedeeld. In het eerste geval maakt de niet evenwijdige raaklijn met de twee anderen regte hoeken, enz.

Deelt men de twee hoeken van de raaklijnen, door twee regte lijnen ieder in twee gelijke deelen, dan ſnijden deze lijnen elkander in het middelpunt.

Zijn de hoeken, die de drie raaklijnen maken, regt, dan zijn de deellijnen tot het middelpunt aan elkander gelijk; maar in de andere gevallen ongelijk, en wel die van den ſtompen hoek korter, dan die van den ſcherpen.

Op deze wijze kan men drie onevenwijdige raaklijnen trekken, die elkander in twee of drie punten ontmoeten.

Vereenigen drie gelijke raaklijnen zich in drie punten, dan is de omtrek in drie gelijke deelen gedeeld.

Zijn twee gelijke en eene ongelijke in drie punten vereenigd, dan is de omtrek in twee gelijke en een ongelijk deel verdeeld.

Is een der hoeken van de raaklijnen regt, dan is de boog, dien zij beſpannen, $\frac{1}{4}$, en ieder der anderen $\frac{3}{8}$ van den omtrek, enz.

Hoe verre men dit bij drie, vier en meer raaklijnen kan voortzetten, begrijpt ieder, die den geest der behandeling inziet.

Wanneer van het raakpunt eener raaklijn door het middelpunt, en door eene evenwijdige chorde tot den omtrek eene lijn trekt, dan ſtaat deze middellijn regthoekig op de chorde, en deelt dezelve in twee gelijke deelen.

Is de chorde niet evenwijdig met de raaklijn, dan kan de middellijn dezelve ſnijden of niet. Snijdt zij de chorde, dan gaat zij ſcheefhoekig door dezelve en niet door het midden.

Alle ſoortgelijke voorſtellen zijn gemakkelijk op te losſen; maar eene der belangrijkſte is, wanneer men tot het kind zegt: trek chorden, raaklijnen, ſtralen en middellijnen, zoo veel en zoodanig als gij wilt, en zoek dan de gewigtigſte betrekkingen en waarheden op.

Bijzonder belangrijk kunnen zulke verrigtingen zijn, wanneer men eenige leerlingen van dezelfde vorderingen bij elkander heeft, die met belangſtelling te werk gaan.

Vol-

Volgens den opgegeven gang, kan men verder voortgaan, en twee, drie, vier en meer cirkels in betrekking met elkander beschouwen, en de waarheden opzoeken. B. v. de radiën en middellijnen van gelijke cirkels zijn gelijk; van ongelijke ongelijk. Die van grootere cirkels zijn grooter, dan die van kleinere.

Verder, twee evenwijdige omtrekken hebben hetzelfde middelpunt.

Twee onevenwijdige omtrekken hebben niet hetzelfde middelpunt.

Kunnen twee in elkander getrokkene omtrekken meer dan een raakpunt hebben?

Wanneer men van het raakpunt van twee in elkander liggende omtrekken, eene lijn tot het middelpunt van den eenen trekt, dan gaat die ook door het middelpunt van den anderen.

Twee omtrekken buiten elkander kunnen mede niet meer dan een raakpunt hebben.

Wanneer men de beide middelpunten van zulke omtrekken door eene regte lijn aan elkander verbindt, dan gaat zij door het raakpunt.

Twee omtrekken kunnen elkander maar in twee punten snijden.

Men kan in dezen verder voortgaan en eene menigte andere betrekkingen van twee gelijke en twee ongelijke cirkels opzoeken, en het middelpunt des eenen plaatsen in den omtrek van den anderen, wanneer belangrijke waarheden, althans van gelijke cirkels gevonden worden.

Al-

Alles wat hier van twee cirkels gezegd is, kan men op drie en meer toepasſen en bepalen, b. v. dat men drie cirkels kan trekken, die elkander in drie punten raken, zoo in- alsuitwendig, dat zij elkander in 1, 2, 3, 4, en meer punten kunnen ſnijden, enz. Daarna kan men het raken en ſnijden te zamen nemen; van de raak- en ſnijpunten lijnen trekken, en alle betrekkingen tot het middelpunt bepalen, en eindelijk de gelijkheid en ongelijkheid der hoeken en zijden opgeven en betogen.

---

§. 27.

De inhoud des Cirkels.

De inhoud van eenen enkel is gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met den halven ſtraal.

(Zie Fig. 183.)

Bewijs. Dewijl men vooronderſtellen kan, dat een cirkel uit vele kleine driehoeken beſtaat, wier bazisſen allen te zamen den omtrek des cirkels uitmaken, en welker hoogte gelijk is aan de radius des

des cirkels; zoo is het duidelijk, dat een cirkel gelijk is aan eenen driehoek, wiens bazis de omtrek, en wiens hoogte de radius is; en daar de driehoek gelijk is aan zijne bazis, vermenigvuldigd met de halve hoogte, zoo is de inhoud van eenen cirkel gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met de halve radius.

Schoon de bovenstaande grondstelling aanwijst, waarmede de inhoud van den cirkel overeenkomt, zoo moet men echter de middellijn en den omtrek vooraf weten te bepalen. Hieruit trekt men de, door vele wiskunstenaren opgegevene, overeenkomst van de middellijn en den omtrek eens cirkels, waardoor men, de eerste gegeven zijnde, de laatste gemakkelijk kan vinden. De meest gebruikelijke voor het dagelijksch leven is die van ARCHIMEDIS, welke wiskunstenaar den omtrek des cirkels tot deszelfs diameter bepaalde te zijn, als 22 tot 7, schoon de reden van 314 : 100 naauwkeuriger is; dit is ook reeds vroeger gezegd.

Uit de eerste opgegevene reden kan eene andere worden afgeleid, welke ons de overeenkomst van het quadraat, dat door vier gelijke raaklijnen gemaakt wordt, en gelijk staat met het quadraat op de middellijn, tot deszelfs cirkel aanwijst, namelijk: 14 : 11.

De inhoud van een gedeelte des cirkels, sector genoemd, is gelijk aan den boog vermenigvuldigd met de halve radius.

(Zie

(Zie fig. 184.)

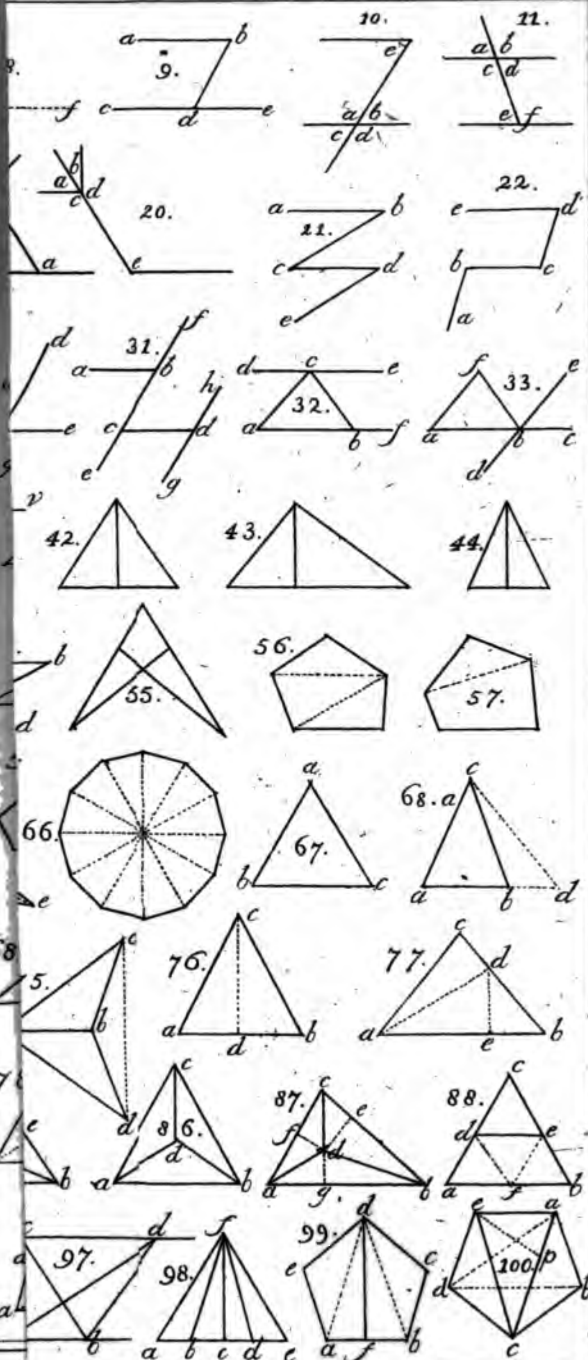
Bewijs. Daar de boog de bazis der driehoeken is, waarin wij den fector vooronderftellen verdeeld te zijn, en de radiën de hoogte derzelve aanwijzen; zoo is de inhoud van de fom der driehoeken, en gevolgelijk van den fector, gelijk aan de fom der bazisfen of den boog, vermenigvuldigd met den halven ftraal.

Hieruit blijkt, dat wanneer de radius van den cirkel bekend is, en het gedeelte, dat de boog van den geheelen omtrek uitmaakt, dat dan de inhoud van den fector gevonden kan worden.

Ook kan men hieruit afleiden, hoe de inhoud van een fegment te vinden is.

Zoo veel meenen wij genoeg te zijn, om den Onderwijzeren een middel aan de hand te geven, om de kinderlijke vermogens krachtig op te voeren, en tevens zulke denkbeelden bij te brengen, die den grondflag van vele verrigtingen in het maatfchappelijke leven uitmaken; zoodat voor kinderen uit den werkzamen ftand der burgerij, geen nuttiger onderwijs kan gegeven worden.

EINDE VAN HET TWEEDE STUKJE.



A. Vallendiiik: Sc.



